第七章 随机变量及其分布

7.1 条件概率与全概率公式

7.1.1 条件概率

对点上分

1. C 【解析】记事件 A:两人取出的球颜色相同,事件 B:两人取出的球同为蓝色,则 $B\subseteq A$,则 $n(A)=3\times3+1\times1=10$,$n(AB)=n(B)=1\times1=1$,由条件概率公式可得 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{1}{10}$,**故选 C.**

2. C

攻略上分 本题涉及的样本空间不太大,可以明确列举出来,因此考虑利用缩样法进行求解.

【解析】事件 A 包含(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1),共 7

提示:在利用列举法求样本点时注意有序与无序的区别

个样本点,其中只有(1,4)和(4,1)满足事件 B="两次点数的最小值为 1",

故 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{2}{7}$,

方法:当基本事件具备有限性和等可能性时,可借助古典概型的概率公式,先求事件 A 包含的样本点数 $n(A)$,再在事件 A 发生的条件下求事件 B 包含的样本点数 $n(AB)$,得 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}$,这也是条件概率的定义在古典概型条件下的特殊模型

故选 C.

易错警示 **在计算条件概率时,忽略样本空间的变化而致错**

本题容易错误地将条件样本空间内的等可能性事件当作原始样本空间的等概率事件,事实上,当事件 A 发生后,需将原始样本空间限制为仅包含 A 的结果集合,再计算事件 B 的概率.

3. D 【解析】由题可知 $P(A)=1-\frac{1}{2^6}=\frac{63}{64}$，事件 $AB=$“取出的重卦中有 4 个阳爻 2 个阴爻或 5 个阳爻 1 个阴爻”，则 $P(AB)=\frac{C_6^4+C_6^5}{2^6}=\frac{21}{64}$，故 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$，

方法：要计算条件概率，常用的方法是公式法，首先得明确事件 A 和事件 B，条件概率公式是 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$，这里的 $P(AB)$ 表示事件 A 和事件 B 同时发生的概率，$P(A)$ 是事件 A 发生的概率

故选 D.

4. BCD 【解析】易知样本空间 $\Omega=\{2,3,\cdots,9\}$，则 $n(\Omega)=8$，事件 A 包含的样本点为 2，4，6，8，则 $n(A)=4$，$P(A)=\frac{1}{2}$；事件 B 包含的样本点为 2，3，4，5，则 $n(B)=4$，$P(B)=\frac{1}{2}$；事件 C 包含的样本点为 2，3，5，7，则 $n(C)=4$，$P(C)=\frac{1}{2}$；

事件 ABC 包含的样本点为 2，则 $n(ABC)=1$，所以 $P(ABC)=\frac{1}{8}$，**A 选项错误；**

事件 $A\cup B$ 包含的样本点为 2，3，4，5，6，8，则 $n(A\cup B)=6$，所以 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$，**B 选项正确；**

事件 AB 包含的样本点为 2，4，则 $n(AB)=2$，$P(AB)=\frac{1}{4}$，所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$，所以 $P(A|B)=P(A)$，**C 选项正确；**

事件 AC 包含的样本点为 2，则 $n(AC)=1$，所以 $P(AC)=\frac{1}{8}$，事件 BC 包含的样本点为 2，3，5，则 $n(BC)=3$，$P(BC)=\frac{3}{8}$，所以 $P(A|C)+P(B|C)=$

$\frac{P(AC)}{P(C)}+\frac{P(BC)}{P(C)}=1$，D 选项正确. 故选 BCD.

5. $\frac{5}{9}$ 【解析】设 A=“摸出的第一个球为红球”，B=“摸出的第二个球为黄球”，C=“摸出的第二个球为黑球”.

则 $P(A)=\frac{1}{10}$，$P(AB)=\frac{1\times2}{10\times9}=\frac{1}{45}$，

$P(AC)=\frac{1\times3}{10\times9}=\frac{1}{30}$.

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{10}}=\frac{2}{9},$$

$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{10}}=\frac{1}{3},$$

$\therefore$ 所求概率为 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$.

一题多解 设 A=“摸出的第一个球为红球”，B=“摸出的第二个球为黄球”，C=“摸出的第二个球为黑球”. 则 $n(A)=1\times C_9^1=9$，$n(AB\cup AC)=C_2^1+C_3^1=5$，

$\therefore$ 所求概率为 $P(B\cup C|A)=\frac{n(AB\cup AC)}{n(A)}=\frac{5}{9}$.

6.【解】(1) 依题意，在事件 A 中，要求两个 1 相邻，故只需要将它们看成一个元素与另外四个数字全排列即可，有 A_5^5 种方法，由古典概型的概率计算公式可得 $P(A)=\frac{A_5^5}{C_6^2A_4^4}=\frac{1}{3}$.

(2) 在事件 B 中，要求两个 1 不能相邻，故只需将 3，4，5，9 全排列，再从四个数字形成的五个空中选两个排 1，有 $A_4^4C_5^2$ 种方法，由古典概型的概率计算公式可得 $P(B)=\frac{A_4^4C_5^2}{C_6^2A_4^4}=\frac{2}{3}$.

(3) 在事件 C 中，要求相同数字不相邻，且相同数字之间只有一个数字，故先在 3，4，5，9 中选出一个数字放在两个 1 之间，将它们看成一个元素，与另外三个元素全排列即可，

有 $C_4^1A_4^4$ 种方法，由古典概型的概率计算公式可得 $P(BC)=\frac{C_4^1A_4^4}{C_6^2A_4^4}=\frac{4}{15}$，

由条件概率公式可得，$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}$，故所求概率为$\frac{2}{5}$.

7. C 【解析】∵ $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$，∴ $P(AB)=P(A)P(B)$，即 A 与 B 相互独立；若 A 与 B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$，∴ $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$. 综上，"$P(B|A)=P(B)$"是"$A$ 与 B 相互独立"的充要条件，

提示：事件独立和条件概率之间存在一定的联系，如果事件 A 和事件 B 是独立的，那么条件概率 $P(B|A)$ 等于事件 B 发生的概率 $P(B)$，反之亦然

故选 C.

8. A 【解析】由 $P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A})P(B)}{P(\overline{A})}=\frac{0.4P(B)}{0.4}=0.3$，得 $P(B)=0.3$. ∵ $P(\overline{A})=0.4$，∴ $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.4=0.6$，又事件 A,B 相互独立，∴ $P(AB)=P(A)P(B)=0.6\times0.3=0.18$. **故选** A.

9. ABD 【解析】由题意可知，事件 A_1，A_2 不可能同时发生，所以为互斥事件，**所以** A **正确**.

取出的两球同色分为都是红色和都是白色，则 $P(B)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}+\frac{C_2^1C_1^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{6}{15}+\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$，**所以** B **正确**.

已知事件 C：取出的两球中至少有一个红球，则其对立事件为取出的两个球中没有红球，则 $P(C)=1-\frac{C_2^1C_1^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{14}{15}$. 易知事件 BC 为"取出的两球都是红球"，则 $P(BC)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{2}{5}$，可知 $P(B)P(C)=\frac{7}{15}\times\frac{14}{15}=\frac{98}{225}\neq P(BC)$，

所以 C 错误.

由题意知 $P(A_2)=\dfrac{1}{3}$,事件 A_2C 为"第一次取出的是白球,第二次取出的是红球",则 $P(A_2C)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{15}$,根据条件概率公式可知 $P(C\mid A_2)=\dfrac{P(A_2C)}{P(A_2)}=\dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{4}{5}$,**所以 D 正确. 故选 ABD.**

10. C 【解析】设 A_i 表示第 i 次打击后该构件没有受损,$i=1,2$,则由已知可得 $P(A_1)=0.85$,$P(A_2|A_1)=0.8$,所以由乘法公式得 $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)=0.85\times0.8=0.68$,即该构件通过质检的概率是 0.68,**故选 C.**

关键点拨 利用相互独立事件同时发生的概率的乘法公式求概率时,注意:(1)确定各事件是相互独立的;(2)确定各事件会同时发生.

11. A 【解析】$\because P(A)=\dfrac{1}{5}$,$P(B|A)=\dfrac{1}{2}$,$\therefore P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}$.

$\because P(\overline{A})=1-P(A)=\dfrac{4}{5}$,$\therefore P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(AB)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{5}$.

关键点 本题用到的公式比较多,关键是要理解条件概率的定义,分清谁是条件,谁是结论,灵活运用条件概率的计算公式及其变形形式

故选 A.

12.【解】记事件 A_i="第 i 次操作后球在 A 区域",B_i="第 i 次操作后球在 B 区域",$i=1,2$.

事件 $\overline{A_i}$="第 i 次操作后球不在 A 区域",即事件 B_i,故 $P(B_i)=1-P(A_i)$,

则事件“第一次操作后球在 A 区域或第二次操作后球在 B 区域都未发生”可表示为 $\overline{A_1}\ \overline{B_2}=B_1A_2$，

由题意，$P(A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(\overline{A_1})=P(B_1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(A_2|B_1)=\frac{5}{6}$，

故由概率乘法公式可得 $P(B_1A_2)=P(B_1)P(A_2|B_1)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{9}$，故所求概率为$\frac{5}{9}$.

能力上分

1. D 【解析】由 $P(A|B)+P(B|A)=0.75$，可得$\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(AB)}{P(A)}=0.75$，又因为 $P(A)=0.2$，$P(B)=0.1$，所以 $10P(AB)+5P(AB)=0.75$，所以 $P(AB)=0.05$，所以这两个村庄同时发生停电事件的概率为 0.05. **故选** D.

2. B 【解析】设第一次取到白球为事件 A，则 $P(A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，

设第二次取到白球为事件 B，则 $P(B|A)=\frac{1}{7}$，

所以 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{28}$. **故选** B.

3. C

攻略上分 首先利用概率的乘法公式求得 $P(AB)$，然后利用通法攻略 14 中定义法求得 $P(B|A)$ 的值，最后利用对立事件的概率公式求得 $P(\overline{B}|A)$ 的值.

【解析】因为 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，所以 $P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，由条件概率公式可得 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$，因此 $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

故选 C.

4. B

攻略上分 先分别求出 $P(A)$（至少有一门是“美育”课程的概率）和 $P(AB)$（两门都是“美育”课程的概率），再利用通法攻略 14 中的定义法求得 $P(B|A)$ 的值.

【解析】设事件 A：至少有一门是“美育”课程，事件 AB：两门都是“美育”课程，从五门课程中任选两门的选法有 $C_5^2=10$（种）.“至少有一门是‘美育’课程”的对立事件是“两门都是‘劳动教育’课程”，两门都是“劳动教育”课程的选法为 $C_2^2=1$（种），所以至少有一门是“美育”课程的选法有 $10-1=9$（种），则 $P(A)=\frac{9}{10}$. 从三个不同的“美育”课程中任选两门的选法有 $C_3^2=3$（种），所以 $P(AB)=\frac{3}{10}$. 由条件概率公式可得 $P(B|A)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{3}$. **故选 B.**

5. ACD 【解析】$P(B)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{4}{9}$，

提示：若第一次抽取的卡片上标的数为奇数，则第二次抽取的卡片上标的数也为奇数；若第一次抽取的卡片上标的数为偶数，则第二次抽取的卡片上标的数也为偶数

故 A 正确；

由 $P(A)=\frac{5}{9}$，$P(AB)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{5}{18}$，

而 $P(A)P(B)=\frac{5}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{20}{81}\neq P(AB)$，**故 B 错误；**

由 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{2}$，**故 C 正确；**

由 $P((A\cup\overline{A})|B)=P(A|B)+P(\overline{A}|B)=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{4}{9}}+\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{\frac{4}{9}}=\frac{5}{8}+\frac{9}{4}\times$

$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=1$（另解：由于 $P(A\cup\overline{A})=1$，所以 $P((A\cup\overline{A})\mid B)=1$），故 D 正确.

故选 ACD.

6. 8

思路导引　由已知条件可求得 $n(C)=4n(ABC)$，$n(C)=2n(AC)$，$n(C)\neq 2n(BC)$，进而可得 $C\neq\varnothing$，$n(ABC)=1$ 或 2，当 $n(ABC)=1$ 时，$n(C)=4$，$n(AC)=2$，$n(BC)\neq 2$，分 $2\in C,4\notin C$ 和 $4\in C,2\notin C$ 两种情况进行讨论，求出满足条件的事件 C，当 $n(ABC)=2$ 时，分析可知不符合要求，从而得到答案.

【解析】事件 $A=\{1,2,3,4\}$，事件 $B=\{2,4,6,8\}$，故 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$. 又 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，故 $P(ABC)=\frac{1}{4}P(C)$，即 $n(C)=4n(ABC)$.

因为 $P(C\mid A)=\frac{P(AC)}{P(A)}$，$P(C)=P(C\mid A)$，所以 $P(C)=\frac{P(AC)}{P(A)}$，故 $P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{2}P(C)$，即 $n(C)=2n(AC)$.

又 $P(C\mid B)=\frac{P(BC)}{P(B)}$，$P(C)\neq P(C\mid B)$，故 $\frac{P(BC)}{P(B)}\neq P(C)$，所以 $P(BC)\neq P(B)P(C)$，即 $P(BC)\neq\frac{1}{2}P(C)$，所以 $n(C)\neq 2n(BC)$，故 $C\neq\varnothing$，其中 $AB=\{2,4\}$，$n(AB)=2$，则 $n(ABC)=1$ 或 $n(ABC)=2$.

难点：根据已知条件结合相关概率公式求得 $n(ABC)$ 的值

若 $n(ABC)=1$，则 $n(C)=4$. 又 $n(C)=2n(AC)$，故 $n(AC)=2$，又 $n(C)\neq 2n(BC)$，故 $n(BC)\neq 2$.

若 $2\in C,4\notin C$，则可令 $C=\{2,3,5,7\}$ 或 $C=\{1,2,5,7\}$ 或 $C=\{1,2,6,8\}$ 或 $C=\{2,3,6,8\}$；

若 $4\in C,2\notin C$，则可令 $C=\{3,4,5,7\}$ 或 $C=\{1,4,5,7\}$ 或 $C=\{1,4,6,8\}$ 或

$C=\{3,4,6,8\}$.

若 $n(ABC)=2$，则 $n(C)=8$，此时 $C=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$n(BC)=4$，故 $n(C)=2n(BC)$，不符合要求，舍去.

综上，满足条件的事件 C 的个数为 8.

7.【解】(1)设"第 i 局比赛棋手胜"为事件 A_i，"第 i 局比赛为平局"为事件 B_i，"第 i 局比赛棋手负"为事件 $C_i(i\in\mathbf{N}^*)$，2 局后比赛终止为事件 M.

因为棋手与机器人比赛 2 局后比赛终止，所以比赛终止时棋手可能得 0 分或 30 分.

①当棋手得分为 0 分时，2 局均负，即 C_1C_2.

②当棋手得分为 30 分时，2 局先平后胜，即 B_1A_2.

因为 C_1C_2，B_1A_2 互斥，所以 $P(M)=P(C_1C_2\cup B_1A_2)=P(C_1C_2)+P(B_1A_2)=P(C_1)P(C_2)+P(B_1)\cdot P(A_2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{16}$.

提示：利用"各局比赛相互独立"，将多局事件的概率转化为单局事件概率的乘积

所以 2 局后比赛终止的概率为$\frac{5}{16}$.

(2)设"3 局后比赛终止"为事件 D，"3 局后棋手挑战成功"为事件 E.

因为 $P(D)=P(B_1B_2A_3\cup B_1C_2C_3\cup C_1A_2A_3\cup C_1B_2C_3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{64}$,

$P(E)=P(B_1B_2A_3+C_1A_2A_3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{64}$.

所以在 3 局后比赛终止的条件下，棋手挑战成功的概率 $P(E\mid D)=\frac{P(DE)}{P(D)}=\frac{P(E)}{P(D)}=\frac{\frac{3}{64}}{\frac{11}{64}}=\frac{3}{11}$.

7.1.2 全概率公式

对点上分

1. D

攻略上分 本题中事件“乙球员参加比赛时，该球队某场比赛不输球”分为 4 个互斥事件，可利用全概率公式求概率.

【解析】设“乙球员参加比赛时，该球队某场比赛不输球”为事件 A，则 $P(A)=0.2\times(1-0.4)+0.5\times(1-0.2)+0.2\times(1-0.5)+0.1\times(1-0.2)=0.7$. **故选** D.

关键点拨 运用全概率公式解决实际问题的注意事项

（1）问题分析：审题，分析是否可以利用全概率公式求解；

（2）求解步骤：注意事件的描述，公式中各概率的计算；

（3）问题总结：应用全概率公式的关键在于对所求事件有概率贡献的全部原因要分析清楚，将所有的可能性都考虑进来，全概率公式中的条件概率是根据实际情况直接得到的，不是利用条件概率公式计算的.

2. B

攻略上分 本题中事件“从市场上任取一支该种型号钢笔，它是次品”分为两个互斥事件，即该次品分别为 A 品牌钢笔与 B 品牌钢笔，因此可利用全概率公式求参数.

【解析】设从市场上任取一支该种型号钢笔，它是次品为事件 A，则 $P(A)=25\%\times4\%+75\%\times a\%=2.5\%$，解得 $a=2$. **故选** B.

3. A 【解析】设事件 A 表示“取得的产品为正品”，事件 B_1 表示“任取 1 箱产品，这箱产品是甲工厂生产的”，事件 B_2 表示“任取 1 箱产品，这箱产品是乙

工厂生产的”，事件 B_3 表示“任取 1 箱产品，这箱产品是丙工厂生产的”. 由题设知 $P(B_1)=\frac{5}{10}=0.5$，$P(B_2)=\frac{3}{10}=0.3$，$P(B_3)=\frac{2}{10}=0.2$，$P(A|B_1)=1-0.1=0.9$，$P(A|B_2)=1-0.2=0.8$，$P(A|B_3)=1-0.3=0.7$，故 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.5\times0.9+0.3\times0.8+0.2\times0.7=0.83$，**故选** A.

易错警示 **不能正确选择全概率公式和贝叶斯公式而致错**

如果随机试验可以看成分两个阶段进行，且第一阶段的各试验具体结果未知，那么：

(1) 若要求的是第二阶段某一个结果发生的概率，则用全概率公式；

(2) 若第二阶段的某一个结果是已知的，要求的是此结果为第一阶段某一个结果所引起的概率，一般用贝叶斯公式，类似于求条件概率.

熟记这个特征，在遇到相关的题目时，可以准确地选择相应的公式进行计算，保证解题的准确性和高效性.

4. B 【解析】记事件 A：抽查的一个产品为合格品，事件 B：抽查的这个产品被判为合格品，

则 $P(A)=0.9$，$P(B|A)=0.95$，$P(B|\overline{A})=0.01$，

由全概率公式可得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.9\times0.95+0.1\times0.01=0.856$.

所以任意抽查一个产品，检查后被判为合格品的概率为 0.856. **故选** B.

5. **思路导引** (1) 利用相互独立事件的乘法公式及对立事件的概率计算公式即可求解；(2) 求出 B 没有与 A 对决过且最后获得冠军的概率，再利用全概率公式计算 B 与 C 对决过且最后获得冠军的概率即可.

【解】(1)A 夺冠即为三轮比赛都获胜，

所以 A 夺冠的概率为 $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

由题意，$B\sim H$ 七名运动员获胜的概率相同，且八名运动员各自夺冠的概率之和为 1，

所以 $B\sim H$ 七名运动员各自夺冠的概率均为 $\frac{1}{7}\times\left(1-\frac{8}{27}\right)=\frac{19}{189}$.

(2)记事件 M=“B 获得冠军”，事件 N=“B 与 A 对决过”，事件 Q=“B 与 C 对决过”.

B 没有与 A 对决过且最后获得冠军的概率 $P(\overline{N}M)=P(M)-P(NM)=\frac{19}{189}-\frac{37}{756}=\frac{39}{756}$.

$P(MQ)=P((N+\overline{N})MQ)=P(NMQ)+P(\overline{N}MQ)=P(NM)P(Q|NM)+P(\overline{N}M)\cdot P(Q|\overline{N}M)$.

由题意，$C\sim H$ 六名运动员与 B 对决过的概率相同，B 夺冠时共与三名运动员对决.

所以 $P(Q|NM)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(Q|\overline{N}M)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

所以 $P(MQ)=\frac{37}{756}\times\frac{1}{3}+\frac{39}{756}\times\frac{1}{2}=\frac{191}{4\ 536}$，故所求概率为 $\frac{191}{4\ 536}$.

6. C 【解析】记事件 A_1：取到的零件为甲车床加工的，事件 A_2：取到的零件为乙车床加工的，

事件 A_3：取到的零件为丙车床加工的，

事件 B：任取一个零件是次品，

则 $P(B|A_1)=\frac{6}{100}=\frac{3}{50}$，$P(B|A_2)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$，$P(B|A_3)=\frac{3}{100}$，

$P(A_1)=\frac{3}{10}$，$P(A_2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$，$P(A_3)=\frac{3}{10}$，

由贝叶斯公式可得 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(A_k)P(B|A_k)}=$

$$\frac{\frac{3}{10}\times\frac{3}{50}}{\frac{3}{10}\times\frac{3}{50}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{20}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{100}}=\frac{18}{47}.$$

因此，若取到的零件是次品，则它是甲车床加工的概率为$\frac{18}{47}$. **故选 C.**

7.【**解**】(1)设“该消费者购买包装茶饮料的单价不超过 10 元”为事件 A，“从购买包装茶饮料的消费者中随机抽取 1 名为男性”为事件 B，

$P(B)=0.35$，$P(\overline{B})=0.65$，$P(A|B)=0.5$，$P(A|\overline{B})=0.7$，

所以 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=0.35\times0.5+0.65\times0.7=0.63$，故所求概率为 0.63.

(2)设“从购买包装茶饮料的消费者中随机抽取 1 名为女性”为事件 $\overline{B}$，

则 $P(\overline{B})=0.65$，$P(A|\overline{B})=0.7$，

则 $P(\overline{B}|A)=\frac{P(\overline{B})P(A|\overline{B})}{P(A)}=\frac{0.65\times0.7}{0.63}=\frac{455}{630}=\frac{13}{18}$，故所求概率为$\frac{13}{18}$.

关键点拨 贝叶斯公式不同于全概率公式，二者的侧重点不同，贝叶斯公式的主要作用是在“事故”产生后，对于“事故责任”的划分，体现出的是一种“问责”，即“执果索因”.

8. (1)【**解**】设 $A=$“选取的人患流感”，用 B_1,B_2,B_3 分别表示选取的人来自甲、乙、丙地区，则 $P(B_1)=\frac{1}{6}$，$P(B_2)=\frac{1}{3}$，$P(B_3)=\frac{1}{2}$，

所以 $P(A|B_1)=0.12$，$P(A|B_2)=0.09$，$P(A|B_3)=0.06$.

由全概率公式得 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{6}\times0.12+\frac{1}{3}\times0.09+\frac{1}{2}\times0.06=0.08$.

(2)【**证明**】根据乘法公式得 $P(AB_i)=P(B_i)\cdot P(A|B_i)$，

由条件概率公式得 $P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(AB_i)}{P(A)}$，

所以 $P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$，$i=1,2,3$.

(3)【解】由(1)(2)知，

$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}\times 0.12}{0.08}=\frac{1}{4}$，

$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.09}{0.08}=\frac{3}{8}$，

$P(B_3|A)=\frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times 0.06}{0.08}=\frac{3}{8}$，

所以 $P(B_1|A)<P(B_3|A)=P(B_2|A)$，故此人来自甲地区的可能性最小.

7.1 节测上分

1. B　【解析】设事件 A 表示“王刚上场”，事件 B 表示“校足球队获胜”，则 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(B|A)=\frac{3}{5}$，所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$，**故选 B.**

2. D　【解析】由概率的加法公式可得 $P(X\geqslant 1)=1-P(X<1)=0.6$，$P(1\leqslant X<3)=0.9-0.4=0.5$，故 $P(Y\leqslant 4|X\geqslant 1)=$

关键：利用概率的加法公式求出相关概率

$P(X<3|X\geqslant 1)=\frac{P(1\leqslant X<3)}{P(X\geqslant 1)}=\frac{0.5}{0.6}=\frac{5}{6}$，**故选 D.**

3. A　【解析】记事件 E 表示甲被派驻到 A 村，事件 F 表示甲、乙被派驻到同一个村，则 $P(E)=\frac{1}{3}$. 由题意将甲、乙、

丙、丁四人分为3组，再将这3组分配给 A,B,C 三个村，则基本事件的总数为 $n(\Omega)=C_4^2A_3^3=36$.

若事件 E,F 同时发生，则甲、乙均被派驻到 A 村，派驻方法有 $A_2^2=2$(种).

所以 $P(EF)=\dfrac{n(EF)}{n(\Omega)}=\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$，所以

$P(F|E)=\dfrac{P(EF)}{P(E)}=\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{6}$. **故选 A.**

一题多解 记事件 E 表示甲被派驻到 A 村，事件 F 表示甲、乙被派驻到同一个村，由题意可知甲被派驻到 A 村有两种情况：

①被派驻到 A 村的只有甲一人，派驻方法有 $C_3^2A_2^2=6$(种)，此时甲、乙不在同一个村；

②被派驻到 A 村的有两人，其中一人是甲，派驻方法有 $C_3^1A_2^2=6$(种)，其中甲、乙同在 A 村的派驻方法有 $A_2^2=2$(种).

所以 $P(F|E)=\dfrac{n(EF)}{n(E)}=\dfrac{2}{6+6}=\dfrac{1}{6}$.

4. D

思路导引 本题中事件"经过两步移动后小球又回到阴影小正方体"分为3个互斥事件：向上、向下或水平移动后又回到阴影小正方体，可利用全概率公式求解.

【解析】由题意可得，一个小球从图中阴影小正方体出发，可以向上、向下或水平移动，设小球向上移动为事件 A，小球水平移动为事件 B，小球向下移动为事件 C，小球回到阴影小正方体为事件 D，则 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，

$P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(D|A)=1$，$P(D|B)=\dfrac{1}{2}$，$P(D|C)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(D)=P(A)\cdot$

$P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$,

注意：全概率公式可用来计算一个复杂事件的概率，它需要将复杂事件的概率分解成若干简单事件的概率计算，即运用了“化整为零”的思想处理问题

故选 D.

5. AD 【解析】由题可知，$P(A_1)=\frac{2}{5}$, $P(A_2)=\frac{3}{5}$, $P(B_1|A_1)=\frac{2}{3}$, $P(B_2|A_1)=\frac{1}{3}$, $P(B_1|A_2)=\frac{1}{2}$, $P(B_2|A_2)=\frac{1}{2}$.

对于 A，由题可知，A_1, A_2 是对立事件，所以 A_1, A_2 是互斥事件，**故 A 正确**；

对于 B，C，$P(A_1B_2)=P(B_2|A_1)\cdot P(A_1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$,

$P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(A_2)\cdot P(B_2|A_2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{30}$,

$P(A_1)P(B_2)=\frac{2}{5}\times\frac{13}{30}=\frac{13}{75}\neq\frac{2}{15}$，故 A_1, B_2 不是独立事件，**故 B，C 错误**；

对于 D，$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{30}$，**故 D 正确. 故选 AD.**

6. ABC 【解析】记第一次抽到 i 号球的事件为 $A_i(i=1,2,3)$，则有 $P(A_1)=\frac{1}{2}$, $P(A_2)=\frac{1}{4}$, $P(A_3)=\frac{1}{4}$.

对于 A，记第二次在 i 号盒子内抽到 1 号球的事件为 $D_i(i=1,2,3)$，则在第一次抽到 2 号球的条件下，将 2 号球放入 2 号盒子内，因此第二次抽到 1 号球的概率为 $P(D_2|A_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，**故 A 选项正确**；

对于 B，记第二次在 i 号盒子内抽到 3 号球的事件为 $B_i(i=1,2,3)$，则 $P(B_1|$

$A_1)=\frac{1}{4},P(B_2|A_2)=\frac{1}{4},P(B_3|A_3)=\frac{1}{6}$,记第二次抽到 3 号球的事件为 B,则 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iB_i)=\sum_{i=1}^{3}[P(A_i)\cdot P(B_i|A_i)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{48}$,**故 B 选项正确;**

对于 C,由 B 选项知,第二次抽到 3 号球的概率为 $\frac{11}{48}$,第二次抽到的球取自编号与第一次取的球的号码相同的盒子, $P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{11}{48}}=\frac{6}{11}$, $P(A_2|B_2)=\frac{P(A_2)P(B_2|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{11}{48}}=\frac{3}{11}$,$P(A_3|B_3)=\frac{P(A_3)P(B_3|A_3)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}}{\frac{11}{48}}=\frac{2}{11}$,

注意:理论研究和实际中还会遇到一类问题,那就是需要根据试验发生的结果寻找原因,分析导致这一试验结果的各种可能的原因中哪个起主要作用,解决这类问题的方法就是利用贝叶斯公式.贝叶斯公式的意义是分析导致某事件发生的各种原因可能性的大小,称为后验概率

即若第二次抽到的是 3 号球,则它来自 1 号盒子的概率最大,**故 C 选项正确;**

对于 D,把 5 个不同的小球分成 3 组的不同分组方法数是 $\left(C_5^3+\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\right)$,将每一种分组方法分成的小球分别放在三个盒子中有 A_3^3 种不同放法,由分步乘法计数原理得不同的放法种数是

$\left(C_5^3+\dfrac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\right)A_3^3=150$，故 D 选项错误.

故选 ABC.

7.【解】(1) 设试验一次，“选到甲袋”为事件 A_1，“选到乙袋”为事件 A_2，“试验结果为红球”为事件 B_1，“试验结果为白球”为事件 B_2.

$P(B_1)=P(A_1)P(B_1|A_1)+P(A_2)P(B_1|A_2)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{10}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{11}{20}$，

所以首次试验结束的概率为$\dfrac{11}{20}$.

(2)(ⅰ) 因为 B_1，B_2 是对立事件，

$P(B_2)=1-P(B_1)=\dfrac{9}{20}$，

所以 $P(A_1|B_2)=\dfrac{P(A_1B_2)}{P(B_2)}=$

$\dfrac{P(B_2|A_1)P(A_1)}{P(B_2)}=\dfrac{\frac{1}{10}\times\frac{1}{2}}{\frac{9}{20}}=\dfrac{1}{9}$，

所以选到的袋子为甲袋的概率为$\dfrac{1}{9}$.

(ⅱ) 由(ⅰ)得 $P(A_2|B_2)=1-P(A_1|B_2)=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$，

所以方案①中取到红球的概率为 $P_1=P(A_1|B_2)P(B_1|A_1)+P(A_2|B_2)\cdot P(B_1|A_2)=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{9}{10}+\dfrac{8}{9}\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{5}{18}$.

方案②中取到红球的概率为 $P_2=P(A_2|B_2)P(B_1|A_1)+P(A_1|B_2)P(B_1|A_2)=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{9}{10}+\dfrac{1}{9}\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{37}{45}$.

因为$\dfrac{37}{45}>\dfrac{5}{18}$，所以方案②中取到红球的概率更大.

8. **思路导引** (1) 根据已知条件可得 $P(AB)=P(A)P(B)$，则事件 A，B 相互独立，利用条件概率即可得解；(2) 由已知条件求得 $P(A|B)=\dfrac{1}{2}$，进而可得 $P(\overline{A}|B)=\dfrac{1}{2}$，即可得解；(3) 记事件 E 表示主持人知道内情，结合互斥事件的概率加法公式，利用条件概率得 $P(A|B)=P(A|BE)P(E|B)+P(A|B\overline{E})\cdot$

【解】(1) 若主持人知道内情，则他必然打开空箱子，$P(B)=1$，则 $P(B\cup A)=1$，

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(B\cup A)=P(A)=P(A)P(B)$，所以事件 A,B 相互独立，

所以 $P(A\mid B)=P(A)=\dfrac{2}{3}$，$P(\overline{A}\mid B)=\dfrac{1}{3}$，

说明不换箱子中奖的概率是$\dfrac{1}{3}$，所以抽奖人换箱子中奖的概率是$\dfrac{2}{3}$.

(2) 若主持人不知道内情，则 $P(A)=P(B)=\dfrac{2}{3}$，于是 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=P(B\mid A)=\dfrac{1}{2}$，$P(\overline{A}\mid B)=\dfrac{1}{2}$，

所以抽奖人不换箱子中奖的概率为$\dfrac{1}{2}$.

(3) 设事件 E 表示主持人知道内情，则 $P(E)=p$，

$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB(E\cup\overline{E}))}{P(B)}=\dfrac{P(ABE\cup AB\overline{E})}{P(B)}=\dfrac{P(ABE)+P(AB\overline{E})}{P(B)}=\dfrac{P(BE)P(A\mid BE)+P(B\overline{E})P(A\mid B\overline{E})}{P(B)}=P(A\mid BE)P(E\mid B)+P(A\mid B\overline{E})P(\overline{E}\mid B)$，

又 $P(B\mid E)=1$，$P(B\mid\overline{E})=\dfrac{2}{3}$，

$P(A\mid BE)=\dfrac{2}{3}$，$P(A\mid B\overline{E})=\dfrac{1}{2}$，

$P(E\mid B)=\dfrac{P(E)P(B\mid E)}{P(E)P(B\mid E)+P(\overline{E})P(B\mid\overline{E})}=\dfrac{3p}{2+p}$，

$P(\overline{E}\mid B)=1-P(E\mid B)=1-\dfrac{3p}{2+p}=\dfrac{2(1-p)}{2+p}$，

因此，$P(A|B)=\frac{2}{3}\times\frac{3p}{2+p}+\frac{1}{2}\times\frac{2(1-p)}{2+p}=\frac{1+p}{2+p}$，

所以抽奖人不换箱子中奖的概率 $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=\frac{1}{2+p}$.

7.2 离散型随机变量及其分布列

对点上分

1. B 【解析】选项 A 的取值是一个固定的数字，不具有随机性，**故 A 错误**；选项 B 取到红球的个数是一个随机变量，它的可能取值是 0，1，2，**故 B 正确**；选项 C 是一个事件而非随机变量，**故 C 错误**；选项 D 中的事件的概率值是一个定值而非随机变量，**故 D 错误. 故选 B.**

2. ① 【解析】根据随机变量的定义可知，②③是随机变量，标准大气压下冰水混合物的温度为 0 ℃，是一个定值，所以①不是随机变量.

关键点拨 判断一个变量是随机变量应满足以下两个条件：(1) 随机试验的结果具有可变性，即每次试验对应的结果不尽相同；(2) 随机试验的结果具有不确定性，即每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果. 如果一个随机试验的结果对应的变量满足以上两点，则该变量即为随机变量.

3. AC 【解析】半小时内经过的车辆数可以一一列举出来，是离散型随机变量，**选项 A 正确**；体重无法一一列举，**选项 B 不正确**；人数可以列举，**选项 C 正确**；某电子元件的寿命可为任意非

负值，不能一一列举出来，**选项 D 不正确. 故选 AC.**

4. C 【解析】选手甲在三次中距离投篮中所有可能出现的情况有：都不中，得 0 分；中一次，得 2 分；中两次，得 4 分；中三次，得 6 分，故总得分 ξ 的所有可能取值为 0,2,4,6,

提醒：在列出随机变量的所有可能取值时，要确保已经考虑所有可能的情况，避免遗漏

所以总得分 ξ 的所有可能取值的和为 12，**故选 C.**

5. C 【解析】把掷中靶盘记为事件 A，不中记为事件 B，由题意得，所产生的不同得分的情况如下，每种情况只列出

提示：由于除了中与不中得分有差别外，是否有连中、连中几次都会影响得分，因此采用分类讨论法

一种可能，情况为 $AAAAAAA$，此时得分为 $7+6=13$；

情况为 $AAAAAAB$，此时得分为 $6+5=11$；

情况为 $AAAAABA$，此时得分为 $6+4=10$；

情况为 $AAAAABB$，此时得分为 $5+4=9$；

情况为 $AAAABAB$，此时得分为 $5+3=8$；

情况为 $AAAABBB$，此时得分为 $4+3=7$；

情况为 $AAABABB$，此时得分为 $4+2=6$；

情况为 $AAABBBB$，此时得分为 $3+2=5$；

情况为 $AABABBB$，此时得分为 $3+1=4$；

情况为 $ABABABB$，此时得分为 $3+0=3$；

情况为 $ABBABBB$，此时得分为 $2+0=2$；

情况为 $ABBBBBB$，此时得分为 $1+0=1$；

情况为 $BBBBBBB$，此时得分为 $0+0=0$.

故小明在此次游戏中得分 X 的可能取

值种数为 13. **故选 C.**

易错警示 **确定随机变量的取值时常见的错误**

(1)取值不全:在列出随机变量的所有可能取值时,可能会遗漏某些情况. 例如,在第一次和第二次从盒子中取球时,可能会忽略取到相同标号球的情况,导致随机变量 ξ 的取值不完整.

(2)忽视隐藏条件:在处理随机变量时,可能会忽略某些隐藏条件,导致计算错误. 例如,在处理随机变量 X 和 Y 的关系时,没有考虑到 X 的分布列需要满足的条件,导致计算结果不正确.

(3)分布模型混淆:在确定随机变量的取值时,可能会混淆不同的分布模型,导致取值错误. 例如,在处理盒中有不同颜色球的问题时,可能会错误地确定随机变量的取值.

6. 0. 79

攻略上分 求解某个范围内随机变量取值的概率,与通法攻略中提供的根据分布列求特定范围概率相符,因此利用可加性求解.

【解析】设事件 M=“射击一次命中环数不小于 8”,则 $P(M)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0.28+0.29+0.22=0.79$.

7. $\dfrac{2}{7}$

攻略上分 随机变量 X 的分布规律为 $P(X=i)=ai^2(i=1,2,3)$,其中含有参数,因此利用随机变量 X 各个可能取值对应概率之和为 1,即利用通法攻略中的归一性建立方程来求解.

【解析】由题意得,$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=a+4a+9a=1$,解得 $a=$

$\frac{1}{14}$，所以 $P(X=2)=4a=\frac{2}{7}$.

8.【解】(1)该校歌咏比赛中，甲班、乙班均可从 A,B,C 三首不同曲目中任选一首，共有 $3^2=9$(种)选法，甲、乙两班选择不同的曲目共有 $A_3^2=6$(种)选法，所以甲、乙两班选择不同曲目的概率 $P_1=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

(2)依题意可知，X 的可能取值为 1，2，3，

$P(X=1)=\frac{C_3^1}{3^4}=\frac{1}{27}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2(2^4-2)}{3^4}=\frac{14}{27}$，$P(X=3)=\frac{C_4^2A_3^3}{3^4}=\frac{4}{9}$，

关键：正确求出各随机变量对应取值的概率

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{14}{27}$	$\frac{4}{9}$

9.【解】(1)因为甲、乙、丙三名同学都没有通过复试的概率为 $\frac{1}{12}$，

所以 $\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times(1-p)=\frac{1}{12}$，

则 $p=\frac{2}{3}$.

(2)由题意知，随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，3.

$P(X=0)=\frac{1}{12}$，

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$，

$P(X=2)=1-\frac{1}{12}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$.

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

10. A

攻略上分 根据归一性求解参数值，再根据相关随机变量分布列之间的关系求解 Y 的分布列，进而求解题目要求的 Y 在某个范围内的概率.

【解析】由题意可知，$a+\frac{1}{3}+5a+\frac{1}{6}=1$，解得 $a=\frac{1}{12}$，所以离散型随机变量 Y 的概率分布列为

Y	-1	1	3	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

提示：求出分布列后注意运用分布列的归一性和非负性检验所求的分布列是否正确

所以 $P(Y\geqslant3)=P(Y=3)+P(Y=5)=\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$，**故选 A.**

11.【解】由题意，(X,Y) 的所有可能取值为 $(0,3)$，$(1,2)$，$(2,1)$，$(3,0)$，取 $(0,3)$ 和 $(3,0)$，$(1,2)$ 和 $(2,1)$ 的概率分别相同，分别记为 p_1，p_2，

则 $p_1=C_3^0\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$p_2=C_3^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，

所以 (X,Y) 的联合分布列为

(X,Y)	3	2	1	0
3	0	0	0	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{3}{8}$	0
1	0	$\frac{3}{8}$	0	0
0	$\frac{1}{8}$	0	0	0

易错警示 离散型随机变量取值列举不全致错

离散型随机变量只取有限个值，并且离散型随机变量的结果可以一一列举出来，列举过程中要做到不重不漏. 对于本题，前提是 $X+Y=3$，单独只考虑 X，则 X 的可能取值为 0，1，2，3，对应的 Y 的可能取值为 3，2，1，0，所以所有可能取值为 (0，3)，(1，2)，(2，1)，(3，0)，注意 (0，3) 和 (3，0)，(1，2) 和 (2，1) 是不同取法.

12. C 【解析】根据两点分布的概念可知，只有 C 选项对应两点分布，

易错：混淆两点分布的定义和性质，错误地认为两点分布的随机变量可以取多个值，或者错误地认为取两个值的概率必须相等

故选 C.

13. D 【解析】由题意可设失败率为 p，则成功率为 $2p$，则 ξ 的分布列为

ξ	0	1
P	p	$2p$

$\therefore p+2p=1$，解得 $p=\dfrac{1}{3}$，$\therefore P(\xi=1)=\dfrac{2}{3}$，**故选** D.

能力上分

1. B 【解析】依题意可得 $P(X=1)+P(X=0)=1$，$P(X=1)-P(X=0)=0.34$，所以 $P(X=1)=\dfrac{1+0.34}{2}=0.67$，**故选** B.

2. B 【解析】依题意可得 $P(\xi=i)=\dfrac{1}{n}(i=1,2,3,\cdots,n,n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $P(\xi<5)=P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)+P(\xi=4)=\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{n}$，解得 $n=12$，**故选** B.

3. A 【解析】由题意可知，X 的所有可能取值为 0，1，2，

则 $P(X\leqslant1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{C_5^3}{C_7^3}+\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{6}{7}$. **故选 A.**

一题多解 由题意可知，X 的所有可能取值为 0，1，2，

则 $P(X\leqslant1)=1-P(X=2)=1-\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{6}{7}$.

4. A 【解析】因为随机变量 X,Y 均服从两点分布，且 $P(X=1)=\frac{1}{3}$，$P(Y=0)=\frac{1}{3}$，

所以 $P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$，

$P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=0)=\frac{1}{3}$，

所以 $P(X=1,Y=1)=P(X=0,Y=0)$，

又因为 $P(X=Y)=\frac{2}{3}$，

所以 $P(X=1,Y=1)=P(X=0,Y=0)=\frac{1}{3}$，

所以 $P(XY=0)=1-P(X=1,Y=1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

5. 0.5 【解析】易知 $0.2+0.1+0.1+0.3+m=1$，解得 $m=0.3$. 由 $Y=|X-2|=2$ 可得 $X=0$ 或 $X=4$，

易错：去绝对值符号时只求出其中一种可能取值而致错

所以 $P(Y=2)=P(X=0)+P(X=4)=0.2+m=0.5$.

6. $\frac{1}{3}$ 【解析】$P(X=n)=\frac{a}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=a(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$，因为 $P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=15)=1$，所以 $a[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{15+1}-\sqrt{15})]=a(\sqrt{15+1}-1)=1$，解得

$a=\frac{1}{3}$.

7.【解】(1)X 的可能取值为 1,2,3,4,5.

$P(X=1)=\frac{C_1^1}{C_5^1}=\frac{1}{5}$,$P(X=2)=\frac{C_4^1C_1^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{1}{5}$,$P(X=3)=\frac{C_4^1C_3^1C_1^1}{C_5^1C_4^1C_3^1}=\frac{1}{5}$,

$P(X=4)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1C_1^1}{C_5^1C_4^1C_3^1C_2^1}=\frac{1}{5}$,$P(X=5)=\frac{C_4^1C_3^1C_2^1C_1^1C_1^1}{C_5^1C_4^1C_3^1C_2^1C_1^1}=\frac{1}{5}$.

因此 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2)$P(X\leqslant 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

故该员工至多试开 3 次的概率为$\frac{3}{5}$.

8.【解】(1)1 班进入决赛的概率为$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,

2 班进入决赛的概率为$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$,

3 班进入决赛的概率为$\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$,

因为$\frac{3}{5}>\frac{1}{2}>\frac{4}{9}$,所以 3 班进入决赛的概率最大,所以 3 班进入决赛的可能性最大.

(2)由(1)可知,1 班、2 班、3 班进入决赛的概率分别为$\frac{4}{9}$,$\frac{1}{2}$,$\frac{3}{5}$,

ξ 的可能取值为 0,1,2,3,

提示:确定随机变量的取值时,要做到准确无误,特别要注意随机变量能否取 0 的情形. 另外,还需注意随机变量是从几开始取值,每种取值对应几种情况

$P(\xi=0)=\left(1-\frac{4}{9}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=$

$\frac{1}{9}$,

$P(\xi=2)=\left(1-\frac{4}{9}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{9}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{18}$,

$P(\xi=3)=\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{15}$,

$P(\xi=1)=1-P(\xi=0)-P(\xi=2)-P(\xi=3)=1-\frac{1}{9}-\frac{7}{18}-\frac{2}{15}=\frac{11}{30}$,

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{15}$

关键点拨 利用离散型随机变量分布列的归一性解题时，分布列中随机变量取不同值时所对应的随机事件彼此互斥，因此在求随机变量某个特定取值的概率时，可先确定随机变量可取哪几个值，再求其他取值所对应的概率，进而利用随机变量分布列的归一性求随机变量特定取值的概率.

9. **思路导引** (1)记从该地区中任抽一人，其年龄在 25 岁以下、25 岁到 50 岁、50 岁及以上分别为事件 A_1,A_2,A_3，其为轻食高频消费者为事件 B，利用全概率公式即可求解；(2)先利用按比例分配的分层随机抽样抽取在 25 岁以下与 25 岁到 50 岁的人数，再求 ξ 的所有可能取值和其对应的概率，即可得 ξ 的分布列.

【解】(1)记从该地区中随机抽取一人，其年龄在 25 岁以下、25 岁到 50 岁、50 岁及以上分别为事件 A_1,A_2,A_3，其为轻食高频消费者为事件 B，则 $P(A_1)=\frac{3}{10}$，$P(A_2)=\frac{3}{5}$，$P(A_3)=\frac{1}{10}$，

由表中数据估计概率 $P(B|A_1)=\frac{3}{10}$，

$P(B|A_2)=\frac{1}{5}$，$P(B|A_3)=\frac{1}{10}$，

所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{11}{50}$，

即从该地区中随机抽取一人，其为轻食高频消费者的概率为$\frac{11}{50}$.

(2)由表知，利用按比例分配的分层随机抽样的方法抽取的 6 人中，年龄在 25 岁以下与 25 岁到 50 岁的人数分别为 3 和 2，依题意，ξ 的所有可能取值分别为 0，1，2，3.

所以 $P(\xi=0)=P(X=1,Y=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{10}$，

$P(\xi=1)=P(X=2,Y=1)+P(X=1,Y=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_6^3}+\frac{C_3^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$，

$P(\xi=2)=P(X=2,Y=0)+P(X=0,Y=2)=\frac{C_3^2}{C_6^3}+\frac{C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

$P(\xi=3)=P(X=3,Y=0)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$

7.3　离散型随机变量的数字特征

7.3.1　离散型随机变量的均值

对点上分

1. B　【解析】由题可得出海收益的期望是 $5\ 000\times0.6+(-2\ 000)\times0.4=2\ 200$ (元). 故选 B.

2. A　【解析】由离散型随机变量分布列

的性质及期望公式可知$\begin{cases}a+b+2b-a=1,\\E(X)=2a+3b+5(2b-a)=3,\end{cases}$

提示：在分布列中随机变量各个取值的概率和为 1

解得$\begin{cases}b=\dfrac{1}{3},\\a=\dfrac{4}{9},\end{cases}$ **故选 A.**

3. D 【解析】由题意，X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

则 $P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{4}{120}=\dfrac{1}{30}$,

$P(X=1)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{36}{120}=\dfrac{3}{10}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{60}{120}=\dfrac{1}{2}$,

$P(X=3)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$,

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{30}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{9}{5}$, **故选 D.**

提示：均值的定义

关键点拨 $E(\xi)$ 是一个实数，即 ξ 作为随机变量是可变的，但 $E(\xi)$ 是不变的.

4. 1.39 【解析】X 的可能取值为 1,2,3,则 $P(X=1)=0.7$, $P(X=2)=(1-0.7)\times0.7=0.21$, $P(X=3)=(1-0.7)\times(1-0.7)\times1=0.09$, 则 $E(X)=1\times0.7+2\times0.21+3\times0.09=1.39$.

5.【解】(1) 选拔赛中 A 至少获胜一场的概率 $P=1-\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{11}{12}$;

提示：至少获胜一场的对立事件是三场全输

(2) X 的所有可能取值为 0,1,2,3,

$P(X=0)=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{1}{12}$,

$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$,

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$,

$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{8}$,

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{8}=\frac{19}{12}$.

方法总结 **求离散型随机变量的均值的步骤**

(1)确定取值:根据随机变量 X 的意义,写出 X 可能取得的全部值;

(2)求概率:求 X 取每个值的概率;

(3)写分布列:写出 X 的分布列;

(4)求均值:由均值的定义求出 $E(X)$.

6. B 【解析】因为一批产品中次品率为 10%,所以这批产品中正品率为 1−10%=90%,则 $E(X)=1\times10\%+0\times90\%=1\times0.1+0\times0.9=0.1$,故选 B.

关键点拨 **两点分布的均值**

若随机变量 X 服从两点分布,且 X 取 1 时对应的概率为 p,则 $E(X)=p$.

7. 0.6　0.6

思路导引　由 $P(X=0)$ 与 $P(X=1)$ 是对立事件的两个概率，可列方程组求出 $P(X=1)$，再根据两点分布的均值公式求出 $E(X)$.

【解析】由题意，随机变量 X 服从两点分布，$P(X=1)-P(X=0)=0.2$，

结合两点分布概率性质可得 $\begin{cases}P(X=1)-P(X=0)=0.2,\\P(X=1)+P(X=0)=1,\end{cases}$ 解得 $P(X=1)=0.6$，所以 $E(X)=1\times0.6=0.6$.

8. $\left[\frac{5}{12},\frac{2}{3}\right]$　【解析】因为随机变量 X，Y 分别服从成功概率为 $\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$ 的两点分布，则 $P(X=0)=\frac{1}{3}$，$P(X=1)=\frac{2}{3}$，$P(Y=0)=\frac{1}{4}$，$P(Y=1)=\frac{3}{4}$，所以 $XY=0$ 或 1，

提示：根据两点分布的定义得出 XY 的值

所以 $E(XY)=0\times P(XY=0)+1\times P(XY=1)=P(XY=1)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)+P(Y=1)-P(X=1$ 或 $Y=1)=\frac{17}{12}-P(X=1$ 或 $Y=1)$，

因为 $P(X=1$ 或 $Y=1)\leqslant1$，且 $P(X=1$ 或 $Y=1)\geqslant\max\{P(X=1),P(Y=1)\}=\frac{3}{4}$，

所以 $-1\leqslant-P(X=1$ 或 $Y=1)\leqslant-\frac{3}{4}$，

所以 $\frac{5}{12}\leqslant\frac{17}{12}-P(X=1$ 或 $Y=1)\leqslant\frac{2}{3}$，

即 $E(XY)$ 的取值范围是 $\left[\frac{5}{12},\frac{2}{3}\right]$.

易错警示　**误用离散型随机变量的期望性质而致错**

错误认为公式 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$ 恒成立，而忽略该性质仅在 X 与 Y 相互独立时才成立，如非独立时直接套用此公式会导致错误，此时需通过其他方法进行计算.

9. D

攻略上分 由于随机变量$(5X+4)$与随机变量X间有线性关系，故可用期望的性质求解.

【解析】易知$0.2+a+0.3=1$，解得$a=0.5$，

所以$E(X)=1\times0.2+2\times0.5+4\times0.3=2.4$，

可得$E(5X+4)=5E(X)+4=5\times2.4+4=16$，**故选** D.

10. 20 【解析】因为$E(X)=1\times0.7+0\times0.3=0.7$，所以$E(10X+13)=10E(X)+13=20$.

11. $\frac{39}{7}$ 【解析】依题意，X的可能取值是$0,50,100$，

则$P(X=0)=\frac{2C_5^3C_5^2}{C_{10}^5}=\frac{50}{63}$，

$P(X=50)=\frac{2C_5^4C_5^1}{C_{10}^5}=\frac{25}{126}$，

$P(X=100)=\frac{2C_5^5C_5^0}{C_{10}^5}=\frac{1}{126}$，

则$E(X)=0\times\frac{50}{63}+50\times\frac{25}{126}+100\times\frac{1}{126}=\frac{75}{7}$，

故$E\left(\frac{1}{3}X+2\right)=\frac{1}{3}E(X)+2=\frac{39}{7}$.

12. C

攻略上分 根据题意先计算出随机变量X取不同值时的概率，再由期望公式列出不等式求解即可.

【解析】由题意，X的取值可能为$1,2,3$，

则$P(X=1)=p$，$P(X=2)=(1-p)p$，

$P(X=3)=(1-p)^2p+(1-p)^3=(1-p)^2$，

所以$E(X)=P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)=p+2(1-p)p+3(1-p)^2=p^2-3p+3>\frac{7}{4}$，即$p^2-3p+\frac{5}{4}>0$，

解得$p>\frac{5}{2}$或$p<\frac{1}{2}$，又$p\in(0,1]$，所以$p\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$. **故选** C.

13. 【解】(1) 记甲班3名运动员一次罚

球命中分别为事件 A,B,C，则甲班这 3 人罚球都没有命中的概率 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=0.4\times0.4\times0.5=0.08$，

所以这 3 人至少有 1 人罚球命中的概率为 $1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-0.08=0.92$.

(2) 由题意知，X 的所有可能取值为 $0,2,4,6$，Y 的所有可能取值为 $0,2,4,6$，

则 $P(X=0)=P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=0.08$，

$P(X=2)=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)=0.6\times0.4\times0.5+0.4\times0.6\times0.5+0.4\times0.4\times0.5=0.32$，

$P(X=4)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)=0.6\times0.6\times0.5+0.6\times0.4\times0.5+0.4\times0.6\times0.5=0.42$，

$P(X=6)=P(ABC)=0.6\times0.6\times0.5=0.18$.

所以 X 的分布列为

X	0	2	4	6
P	0.08	0.32	0.42	0.18

所以 $E(X)=0\times0.08+2\times0.32+4\times0.42+6\times0.18=3.4$.

记乙班 3 名运动员一次罚球命中分别为事件 a,b,c，则 $P(Y=0)=P(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c})=0.3\times0.5\times0.6=0.09$，

$P(Y=2)=P(a\overline{b}\,\overline{c})+P(\overline{a}b\overline{c})+P(\overline{a}\,\overline{b}c)=0.7\times0.5\times0.6+0.3\times0.5\times0.6+0.3\times0.5\times0.4=0.36$，

$P(Y=4)=P(ab\overline{c})+P(a\overline{b}c)+P(\overline{a}bc)=0.7\times0.5\times0.6+0.7\times0.5\times0.4+0.3\times0.5\times0.4=0.41$，

$P(Y=6)=P(abc)=0.7\times0.5\times0.4=0.14$.

所以 Y 的分布列为

Y	0	2	4	6
P	0.09	0.36	0.41	0.14

所以 $E(Y)=0\times0.09+2\times0.36+4\times0.41+6\times0.14=3.2$.

因为 $E(X)>E(Y)$，所以甲班球队更优秀.

关键点拨 随机变量的均值反映了随机变量的平均水平，所以均值可以解决实际生活中的一些决策问题，不过均值是大的好还是小的好也要根据具体问题而定，如经济收入的均值是越大越好，生产中的次品数的均值是越小越好.

7.3.2 离散型随机变量的方差

对点上分

1. D 【解析】由已知可得 $P(X=1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，$E(X)=\frac{2}{3}$，由方差公式可得 $D(X)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$，**故选 D.**

一题多解 由题意，随机变量 X 服从两点分布，令 $p=P(X=1)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，由两点分布的方差公式 $D(X)=p(1-p)$，可得 $D(X)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$.

2. C 【解析】设 $P(X=1)=p$，则可得 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	p	$\frac{4}{5}-p$

根据期望公式得 $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times p+2\times\left(\frac{4}{5}-p\right)=\frac{8}{5}-p=1$，解得 $p=\frac{3}{5}$，所以根据方差公式得 $D(X)=(0-1)^2\times\frac{1}{5}+(1-1)^2\times\frac{3}{5}+(2-1)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$，

故标准差为 $\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，

易错：误认为方差即为标准差，忘记开方，从而错选 A

故选 C.

3. B 【解析】因为 $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$，所以随机变量 X 的值只能为 x_1,x_2，

由$\begin{cases}\dfrac{2}{3}x_1+\dfrac{1}{3}x_2=\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{2}{3}\left(x_1-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(x_2-\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{2}{9},\end{cases}$

提示：根据离散型随机变量的期望与方差的计算公式结合已知条件列出方程组

解得$\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{3},\\ x_2=\dfrac{2}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=2,\end{cases}$所以$|x_1-x_2|=1$.

故选 B.

4. B 【解析】由题设，$\{x_{i_1},x_{i_2}\}$（无序）可能情况有$\{2,4\}$，$\{2,5\}$，$\{2,9\}$，$\{4,5\}$，$\{4,9\}$，$\{5,9\}$，

提示：列举时注意有序与无序的区别

分别依次对应$\{x_{i_3},x_{i_4}\}$（无序）有$\{5,9\}$，$\{4,9\}$，$\{4,5\}$，$\{2,9\}$，$\{2,5\}$，$\{2,4\}$，所以上述情况对应(X,Y)依次为$(5,4)$，$(4,5)$，$(4,5)$，$(4,5)$，$(4,5)$，$(5,4)$，

关键：利用列举法得出(X,Y)的所有可能取值情形

所以$P(X=5)=P(Y=4)=\dfrac{1}{3}$，$P(X=4)=P(Y=5)=\dfrac{2}{3}$，故$E(X)=5\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{3}$，$E(Y)=4\times\dfrac{1}{3}+5\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{14}{3}$，$D(X)=\left(5-\dfrac{13}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(4-\dfrac{13}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$，$D(Y)=\left(4-\dfrac{14}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\left(5-\dfrac{14}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$，所以$E(X)<E(Y)$，$D(X)=D(Y)$. **故选 B.**

5. 【解】(1) 依题意，X的可能取值有0，1，2，

则$P(X=0)=\dfrac{C_7^2}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{15}$，$P(X=1)=\dfrac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\dfrac{7}{15}$，$P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{15}$.

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

(2)由(1)中的分布列,可得 $E(X)=1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$,

$D(X)=\left(0-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{7}{15}+\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{7}{15}+\left(2-\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{1}{15}=\frac{28}{75}$.

方法总结 求离散型随机变量的方差的步骤

(1)理解 X 的意义,写出 X 可能取到的全部值;

(2)求出 X 取每个值的概率;

(3)写出 X 的分布列;

(4)由均值的定义求出 $E(X)$;

(5)由方差的定义或方差与均值的关系求 $D(X)$.

6. B

攻略上分 由于随机变量 $2X$ 与随机变量 X 间有线性关系,故可用方差的性质求解.

【解析】由题知,X 服从两点分布,且 $P(X=1)=p$,$P(X=0)=1-p$,

所以 $D(X)=p(1-p)$,$D(2X)=4D(X)=4p(1-p)$,**故选 B.**

易错警示 错用方差的性质而致错

对于方差的性质 $D(aX+b)=a^2D(X)$,易错误应用为 $D(aX+b)=aD(X)+b$ 或 $D(aX+b)=aD(X)$ 或 $D(aX+b)=a^2D(X)+b$ 等,要注意对公式进行准确的记忆与应用.

7. B 【解析】因为随机变量 X 的概率分布列为 $P(X=n)=\frac{a}{n^2+n}(n=1,2,3)$,

故 $\frac{a}{2}+\frac{a}{6}+\frac{a}{12}=1$,得 $a=\frac{4}{3}$,

所以 $P(X=1)=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$,

$P(X=2)=\frac{4}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$,

$P(X=3)=\frac{4}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{9}$,

故 $E(X)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{9}=\frac{13}{9}$,

又 $D(aX+2)=a^2D(X)=\frac{16}{9}D(X)$,

而 $D(X)=\left(1-\frac{13}{9}\right)^2\times\frac{2}{3}+\left(2-\frac{13}{9}\right)^2\times\frac{2}{9}+\left(3-\frac{13}{9}\right)^2\times\frac{1}{9}=\frac{38}{81}$,

故 $D(aX+2)=\frac{16}{9}D(X)=\frac{608}{729}$. **故选 B.**

8. C

思路导引 设蓝色骰子掷出的点数为 Z,列举出当 $X+Y+Z=15$ 时,所有可能出现的结果,利用古典概型及条件概率,可判断选项 A,B 的正误;利用期望及方差的定义及性质,可判断选项 C,D 的正误.

【解析】设蓝色骰子掷出的点数为 Z,同时抛掷这三枚骰子,在 $X+Y+Z=15$ 的条件下,可能出现的结果 (X,Y,Z) 有 $(3,6,6)$,$(4,5,6)$,$(4,6,5)$,$(5,4,6)$,$(5,6,4)$,$(5,5,5)$,$(6,3,6)$,$(6,6,3)$,$(6,4,5)$,$(6,5,4)$,共 10 种.

对于 A,$X+Y=12$ 等价于 $Z=3$,只有 $(6,6,3)$ 这 1 种结果,$P(X+Y=12)=\frac{1}{10}$,$P(X=6)=P(Y=6)=\frac{4}{10}$,$P(X=6)\cdot P(Y=6)=\frac{4}{25}$,**故 A 错误;**

对于 B,$Y=4$ 的结果有 $(5,4,6)$,$(6,4,5)$,$P(X=5\mid Y=4)=\frac{1}{2}$,$Y=5$ 的结果有 $(4,5,6)$,$(5,5,5)$,$(6,5,4)$,$P(X=4\mid Y=5)=\frac{1}{3}$,**故 B 错误;**

对于 C,Z 的可能取值为 3,4,5,6,$E(Z)=\frac{1}{10}\times3+\frac{2}{10}\times4+\frac{3}{10}\times5+\frac{4}{10}\times6=5$,则 $E(X+Y)=E(15-Z)=15-E(Z)=10$,**故 C 正确;**

对于 D,$D(Z)=\frac{1}{10}\times(3-5)^2+\frac{2}{10}\times(4-5)^2+\frac{3}{10}\times(5-5)^2+\frac{4}{10}\times(6-5)^2=1$,同理 $D(X)=1$,则 $D(X+Y)=D(15-Z)=$

$D(Z)=1\neq 4D(X)$，故 D 错误. 故选 C.

9. D

攻略上分 首先根据两个分布列分别求出 $E(X)$，$E(X^2)$，$E(Y)$，$E(Y^2)$，然后利用通法攻略 17 中的期望与方差的关系求解.

【解析】由题意，得 $E(X)=\frac{1}{2}$，$E(X^2)=\frac{1}{2}$，$E(Y)=\frac{1}{2}$，$E(Y^2)=\frac{5}{2}$，

所以 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{4}$，

另解：随机变量 X 服从两点分布，则 $D(X)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$D(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{9}{4}=9D(X)$.

故选 D.

10. B

攻略上分 根据分布列用 x 分别表示出 $E(\xi)$，$E(\xi^2)$，然后利用配方法结合二次函数求解.

【解析】由期望的公式，可得 $E(\xi)=0.4+2x$，所以 $E(\xi^2)=0.4+4x$，则 $D(\xi)=E(\xi^2)-(E(\xi))^2=0.4+4x-(0.4+2x)^2=-4x^2+2.4x+0.24=-4(x-0.3)^2+0.6$，

易错：容易混淆 $E(\xi^2)$ 与 $(E(\xi))^2$ 的运算顺序

所以当 $x=0.3$ 时，$D(\xi)_{max}=0.6$，故选 B.

11. D 【解析】股票 A 收益 X 的期望为 $E(X)=-2\times0.1+0\times0.3+2\times0.6=1$，方差为 $D(X)=(-2-1)^2\times0.1+(0-1)^2\times0.3+(2-1)^2\times0.6=1.8$，股票 B 收益 Y 的期望为 $E(Y)=0\times0.3+1\times0.4+2\times0.3=1$，方差为 $D(Y)=(0-1)^2\times0.3+(1-1)^2\times0.4+(2-1)^2\times0.3=0.6$，所以 $E(X)=E(Y)$，$D(X)>D(Y)$，

提示：在两种产品相比较时，只比较均值往往是不恰当的，还需比较它们的取值偏离于均值的平均程度，即方差的大小

投资股票 A 的期望收益等于投资股票

B 的期望收益，但投资股票 B 的风险比投资股票 A 的风险小，**故选 D.**

方法总结 **解答离散型随机变量的实际应用问题的关注点**

(1)分析题目背景，根据实际情况抽象出概率模型，特别注意随机变量的取值及其实际意义.

(2)若题目无特殊要求，则在实际决策问题中，需先计算均值，看一下谁的平均水平高，然后再计算方差，分析一下谁的发挥相对稳定. 因此，在利用均值和方差的意义去分析解决实际问题时，往往两者都要分析.

12. **攻略上分** (1)由 X_1 和 X_2 对应分布列以及与 Y_1 和 Y_2 之间的关系，求出 Y_1 和 Y_2 的期望，进而由方差公式求 $D(Y_1)$ 和 $D(Y_2)$；

(2)由题设 A，B 项目所获利润分别为 $Z_1=\frac{x}{200}Y_1$，$Z_2=\frac{200-x}{200}Y_2$，应用方差的性质求出 $f(x)=D(Z_1)+D(Z_2)$ 关于 x 的表达式，因为函数 $f(x)$ 表达式为二次函数，所以可以用配方法来求解最小值.

【解】(1)根据题中所给分布列，可知

$E(Y_1)=10\times0.6+20\times0.4=14$，

$E(Y_2)=4\times0.1+16\times0.5+24\times0.4=18$，

$D(Y_1)=(10-14)^2\times0.6+(20-14)^2\times0.4=24$，

$D(Y_2)=(4-18)^2\times0.1+(16-18)^2\times0.5+(24-18)^2\times0.4=36.$

(2)设投资 A 项目所获利润为 $Z_1=\frac{x}{200}\cdot Y_1$，

投资 B 项目所获利润为 $Z_2=\frac{200-x}{200}Y_2$，

则 $f(x)=D(Z_1)+D(Z_2)=D\left(\frac{x}{200}Y_1\right)+D\left(\frac{200-x}{200}Y_2\right)=\left(\frac{x}{200}\right)^2D(Y_1)+\left(\frac{200-x}{200}\right)^2D(Y_2)=\frac{3}{100^2}[5(x-120)^2+$

$48\ 000]$,

故当 $x=120$ 时,$f(x)$ 取得最小值.

7.3 节测上分

1. A 【解析】根据分布列可得 $P(|X|=1)=P(X=1)+P(X=-1)=1-0.3-0.3=0.4.$

$E(|X|)=0\times0.3+1\times0.4+2\times0.3=1,$

$E(2|X|+1)=2E(|X|)+1=2\times1+1=3.$ **故选** A.

2. A

思路导引 利用分布列的性质及期望公式求得 $E(X)=\frac{3}{2}+\cos^2\theta$,再利用余弦函数性质求解判断.

【解析】依题意,$t+\frac{1}{2}\sin^2\theta=\frac{1}{2}$,则 $t=\frac{1}{2}\cos^2\theta$,则 $E(X)=\frac{1}{2}\sin^2\theta+1+\frac{3}{2}\cos^2\theta=\frac{3}{2}+\cos^2\theta$,

当 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时,$\frac{1}{2}\leqslant\cos\theta\leqslant1$,

$\frac{1}{4}\leqslant\cos^2\theta\leqslant1$,则 $\frac{7}{4}\leqslant E(X)\leqslant\frac{5}{2}$,

所以 $E(X)$ 有最大值 $\frac{5}{2}$,最小值 $\frac{7}{4}$,A **正确**,BCD **错误. 故选** A.

3. D 【解析】随机变量 X 表示停止摸球时摸到白球的个数,则 X 的可能取值为 $0,1,2,3$.

$P(X=0)=\frac{A_3^3}{A_6^3}=\frac{1}{20}$,

提示:$P(X=0)$ 表示在摸出 3 个红球时停止摸球,没有摸到白球的概率

$P(X=1)=\frac{C_3^1\times C_3^1\times A_3^3}{A_6^4}=\frac{3\times3\times6}{6\times5\times4\times3}=\frac{3}{20}$,

提示:$P(X=1)$ 表示在摸出 3 个红球时停止摸球,且只摸到 1 个白球的概率

$P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_3^1\times A_4^4}{A_6^5}=$

$\dfrac{3\times3\times24}{6\times5\times4\times3\times2}=\dfrac{3}{10}$,

提示:$P(X=2)$ 表示在摸出 3 个红球时停止摸球,且摸到 2 个白球的概率

$P(X=3)=\dfrac{C_3^1\times A_5^5}{A_6^6}=\dfrac{1}{2}$,

提示:$P(X=3)$ 表示在摸出 3 个红球时停止摸球,且摸到 3 个白球的概率

故期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{20}+1\times\dfrac{3}{20}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{4}$. **故选** D.

4. B 【解析】因为随机变量 X 服从两点分布,且 $P(X=0)=1-p$,$P(X=1)=p$,

所以 $E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$,

$D(X)=(0-p)^2\times(1-p)+(1-p)^2p=p-p^2(0<p<1)$,

$D(X)$ 是一个关于 p 的二次函数,图象开口向下,对称轴为直线 $p=\dfrac{1}{2}$,当 $0<p<\dfrac{1}{2}$ 时,$D(X)$ 随 p 增大而增大;当 $\dfrac{1}{2}\leqslant p<1$ 时,$D(X)$ 随 p 增大而减小.

因此,当 p 在 $(0,1)$ 内增大时,方差 $D(X)$ 先增大后减小. **故选** B.

5. B 【解析】该队员比赛两局的得分 X 可能的取值为 0,1,2,3,4,6,

$P(X=0)=c^2$,$P(X=1)=2bc$,$P(X=2)=b^2$,$P(X=3)=2ac$,$P(X=4)=2ab$,$P(X=6)=a^2$,且 $a+b+c=1$,则 $E(X)=2bc+2b^2+6ac+8ab+6a^2=2b(1-a-b)+2b^2+6a(1-a-b)+8ab+6a^2=6a+2b=2$,

则有 $3a+b=1\geqslant2\sqrt{3ab}$,得 $ab\leqslant\dfrac{1}{12}$,当且仅当 $3a=b$,即 $a=\dfrac{1}{6}$,$b=\dfrac{1}{2}$ 时,等号成立,所以 ab 的最大值为 $\dfrac{1}{12}$. **故选** B.

6. ABC 【解析】若 2 列字母相同,余下的 1 列字母一定相同,故 X 的取值不

可能为 2,所以 X 的所有可能取值有 0,1,3,A 正确;

将 x,x,y,y,z,z 放入 2 行 3 列的表格中,每格 1 个字母的总填法有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$(种),每列字母均不相同的填法有 $A_3^3C_2^1+C_3^1C_3^2\times4=48$(种),

提示:若每行不存在相同字母,假定 1 行为 x,y,z,则另 1 行只有 y,z,x 或 z,x,y 这 2 种填法;若每行存在相同字母,先选首行相同的字母是哪个,再从首行 3 个格中选 2 个格填入,最后再排剩下的 4 个格

所以 $P(X=0)=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$,B 正确;

结合 A,B 选项,且 $P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^1\times4}{90}=\frac{2}{5}$,$P(X=3)=\frac{A_3^3}{90}=\frac{1}{15}$,

提示:若只有 1 列字母相同,先选定哪列字母相同,再选定相同字母是哪个,最后再排剩下的 4 个格

则由期望与方差公式得 $E(X)=0+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$,$D(X)=\frac{24}{125}+\frac{8}{125}+\frac{48}{125}=\frac{16}{25}$,故 C 正确,D 错误.

7. 8 【解析】由题意可得 $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=\cdots=P(X=n)=\frac{1}{n}$,则 $E(X)=\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n+1}{2}=3$,解得 $n=5$,所以 $D(X)=\frac{1}{5}[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]=2$,所以 $D(2X+1)=4D(X)=8$.

8. $0.8^{k-1}\times0.2$　4 【解析】抽样次数 X 的可能取值为 $1,2,3,\cdots,n-1,n$,则

$$P(X=k)=\begin{cases}0.8^{k-1}\times0.2, k\in\mathbf{N}^*, k<n,\\0.8^{n-1}, k=n,\end{cases}$$

易错:求解中易漏考虑 $k=n$ 的情形

$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}(k\times0.8^{k-1}\times0.2)+n\times0.8^{n-1}=0.2\sum_{k=1}^{n-1}(k\times0.8^{k-1})+n\times0.8^{n-1}$,

$\sum_{k=1}^{n-1}(k\times0.8^{k-1})=1\times0.8^0+2\times0.8^1+3\times$

$0.8^2+\cdots+(n-1)\times0.8^{n-2}$，于是 $0.8\sum_{k=1}^{n-1}(k\times0.8^{k-1})=1\times0.8^1+2\times0.8^2+3\times0.8^3+\cdots+(n-1)\times0.8^{n-1}$，两式相减，得 $0.2\sum_{k=1}^{n-1}(k\times0.8^{k-1})=1+0.8^1+0.8^2+\cdots+0.8^{n-2}-(n-1)\times0.8^{n-1}=\frac{1-0.8^{n-1}}{1-0.8}-(n-1)\times0.8^{n-1}=5-(n+4)\times0.8^{n-1}$，

方法：错位相减法是一种简单有效的概率求和方法，适用于互斥事件或相互独立事件的概率求和

则 $E(X)=5-(n+4)\times0.8^{n-1}+n\times0.8^{n-1}=5(1-0.8^n)$，由 $5(1-0.8^n)\leqslant3$，得 $0.8^n\geqslant0.4$，数列 $\{0.8^n\}$ 递减，$0.8^4=0.4096>0.4$，$0.8^5=0.32768<0.4$，因此 $n\leqslant4$，所以 n 的最大值为 4.

提示：利用数列单调性求最值时，要注意角标 n 的取值范围

9. 思路导引 (1)根据分布列的性质求出 t，再根据期望、方差公式计算可得 $E(X)$ 和 $D(X)$；

(2)设此销售员 3 月份出差一次油费补贴为 Y 元，则 $Y=3X-4(X>3,X\in\mathbf{N})$，然后利用期望、方差的性质计算可得.

【解】(1)由题意，得 $0.1+0.3+2t+t=1$，解得 $t=0.2$.

所以 X 的分布列为

X	20	30	32	36
P	0.1	0.3	0.4	0.2

所以 $E(X)=20\times0.1+30\times0.3+32\times0.4+36\times0.2=31$，

$D(X)=(20-31)^2\times0.1+(30-31)^2\times0.3+(32-31)^2\times0.4+(36-31)^2\times0.2=17.8$.

(2)设此销售员 3 月份出差一次油费补贴为 Y 元，

则 $Y=3(X-3)+5=3X-4(X>3,X\in\mathbf{N})$，由题意，$X$ 所有取值均满足上式，

关键：根据题意求出 Y 与 X 间的关系式

所以 $E(Y)=E(3X-4)=3E(X)-4=3\times31-4=89$，

$D(Y)=D(3X-4)=3^2\times D(X)=3^2\times 17.8=160.2$.

故此销售员 3 月份出差一次所获油费补贴的均值为 89 元,方差为 160.2.

10.【解】(1)设事件 A=“比赛采用三局两胜制甲胜”,

则 $P(A)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{27}$.

(2)X 的所有可能取值为 0,1,2,

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$,

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

所以期望为 $E(X)=1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{3}=\frac{13}{12}$,

方差为 $D(X)=\left(0-\frac{13}{12}\right)^2\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{13}{12}\right)^2\times\frac{5}{12}+\left(2-\frac{13}{12}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{83}{144}$.

(3)采用三局两胜制进行比赛甲获胜的概率 $f(p)=p^2+(1-p)\cdot p^2+p\cdot(1-p)\cdot p=p^2(3-2p)$,

采用五局三胜制进行比赛甲获胜的概率 $g(p)=p^3+[(1-p)p^3+p(1-p)p^2+p^2(1-p)p]+[(1-p)^2p^3+(1-p)p(1-p)p^2+(1-p)p^2(1-p)p+p(1-p)^2p^2+p^2(1-p)^2p+p(1-p)p(1-p)p]=p^3(6p^2-15p+10)$.

则 $g(p)-f(p)=3p^2(2p^3-5p^2+4p-1)=3p^2(p-1)^2(2p-1)$,

因为 $\frac{1}{2}<p<1$ 时,$2p-1>0$,所以 $g(p)>f(p)$,故选择五局三胜制对甲有利.

7.4　二项分布与超几何分布

7.4.1　二项分布

对点上分

1. B　【解析】①由于试验的条件不同(硬币质地不同),因此不是 n 次独立重复试验;

②某人射击,击中目标的概率是稳定的,因此是 n 次独立重复试验;

③每次抽取时每种颜色出现的可能性不相等,因此不是 n 次独立重复试验;

④每个新生儿是男婴和女婴的概率是一样的,是 n 次独立重复试验.

故选 B.

易错警示 n 次独立重复试验是要在相同的条件下能重复地做试验,并且每次试验的结果只有相互对立的两个结果,可以称之为“成功”和“失败”,所以要判断是不是 n 次独立重复试验要从这两方面考虑,缺一不可.

2. C 【解析】根据题意,甲运动员前 5 局内需要赢 3 局,第 6 局甲胜,

则甲以 4 比 2 获胜的概率为 $C_5^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$. **故选** C.

3. C 【解析】由二项分布概率公式可得

$P(X=n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{27}$,所以 $n=3$,则

$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$,

故选 C.

4. A 【解析】依题意 $X\sim B(3,0.9)$,因为 3 个投保人中,活过 65 岁的人数为 X,所以没活过 65 岁的人数为 $3-X$,因此 $Y=100(3-X)+5X$,即 $Y=300-95X$ $(X=0,1,2,3)$,所以 $P(Y<200)=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2\times0.9^2\times(1-0.9)+C_3^3\times0.9^3=0.972$. **故选** A.

5. B

攻略上分 由题可知 p 为变量,可利用大招攻略 19 中的导数法,构造关于 p 的函数,通过研究其单调性,确定 $P\left(x\geqslant\frac{3}{2}\right)$ 的取值范围.

【解析】由 $X\sim B(3,p)$,得 $P(X=k)=C_3^kp^k(1-p)^{3-k}$, $k=0,1,2,3$,

$P\left(X\geqslant\frac{3}{2}\right)=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2p^2(1-p)^1+C_3^3p^3=-2p^3+3p^2$,且 $\frac{1}{2}\leqslant p<1$.

构造函数 $f(x)=-2x^3+3x^2$, $\frac{1}{2}\leqslant x<1$,

则 $f'(x)=-6x^2+6x$,由于 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$,所以 $f'(x)>0$,所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增.

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $f(1)=1$, 所以 $P\left(X\geqslant\frac{3}{2}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. **故选 B.**

6. B

攻略上分 本题为已知 $P(X=k_0)$ 最大，确定 k_0 的取值问题，可利用大招攻略 19 中的不等式组法求解.

【解析】小球碰到小木钉后下落方向有向左或向右两种可能结果，且概率均为 $\frac{1}{2}$，在下落过程中小球共碰撞小木钉 10 次，且每次碰撞后的下落方向不受上一次下落方向的影响，故 X 服从二项分布，即 $X\sim B\left(10,\frac{1}{2}\right)$.

令 $P(X=k_0)$ 最大，

则 $\begin{cases}P(X=k_0)\geqslant P(X=k_0-1),\\P(X=k_0)\geqslant P(X=k_0+1),\end{cases}$

即 $C_{10}^{k_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k_0}\geqslant C_{10}^{k_0-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{11-k_0}$，且 $C_{10}^{k_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k_0}\geqslant C_{10}^{k_0+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_0+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{9-k_0}$,

解得 $\frac{9}{2}\leqslant k_0\leqslant\frac{11}{2}$，又 $0\leqslant k\leqslant 10$, $k\in\mathbf{Z}$,

所以 $k_0=5$,

所以 $P(X=k)\leqslant P(X=5)$, $k=0,1,2,3,\cdots,10$. **故选 B.**

7. D 【解析】由 $X\sim B(10,0.4)$ 得 $E(X)=10\times0.4=4$, $D(X)=10\times0.4\times(1-0.4)=2.4$，所以 $E(2X+D(-X))=E(2X+2.4)=2E(X)+2.4=10.4$，**故选 D.**

规律方法 若随机变量 X 服从二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$, $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，则有 $E(X)=np$, $D(X)=np(1-p)$.

8. BCD 【解析】从袋子中有放回地取球 4 次，每次取球互不影响，并且每次取到的黑球概率相等，

由每次取 1 个球，取到白球记 0 分，取到黑球记 1 分，可知 4 次取球的总分数相当于抽到黑球的总个数，又每次摸到黑球的概率为 $\frac{2}{3}$，因为是有放回地取 4 次球，所以 $X\sim B\left(4,\frac{2}{3}\right)$，**故 A 错误；**

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$,

故 B 正确;

根据二项分布均值公式得 $E(X)=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$,故 C 正确;

根据二项分布方差公式得 $D(X)=4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$,故 D 正确. 故选 BCD.

9. **攻略上分** 本题第(2)问为二项分布中求解概率最值问题,可通过大招攻略 19 中的比商法求解.

【解】(1)由题意可知,每次向右移动的概率是$\frac{1}{3}$,向上移动的概率是$\frac{2}{3}$,

x_3 为 3 次移动中向右移动的次数,其可能的取值为 0,1,2,3,

所以 $x_3\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$,

$P(x_3=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$,

$P(x_3=1)=C_3^1\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$,

$P(x_3=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,

$P(x_3=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,

所以 x_3 的分布列为

x_3	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

(2)当 $n=10$ 时,设 $x_{10}=k$ 的概率最大,

则 $P(x_{10}=k)=C_{10}^k\times\left(\frac{1}{3}\right)^k\times\left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$,

$P(x_{10}=k-1)=C_{10}^{k-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{11-k}$,

所以$\frac{P(x_{10}=k)}{P(x_{10}=k-1)}=$

$$\frac{C_{10}^k\times\left(\frac{1}{3}\right)^k\times\left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}}{C_{10}^{k-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{11-k}}=\frac{11-k}{2k},$$

所以当 $k\leqslant3$ 时,$P(x_{10}=k)>P(x_{10}=k-1)$,当 $k\geqslant4$ 时,$P(x_{10}=k)<P(x_{10}=k-1)$,

所以 $P(x_{10}=1)<P(x_{10}=2)<P(x_{10}=3)>P(x_{10}=4)>\cdots$,

即当 $x_{10}=3$ 时概率最大,所以游戏结束时甲同学到达点(3,7)的概率最大.

(3)由题意知 $X_n=2x_n+y_n=2x_n+n-x_n=n+x_n$,

因为 $x_n\sim B\left(n,\frac{1}{3}\right)$,所以 $E(x_n)=\frac{n}{3}$,

$D(x_n)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2n}{9}$,

所以 $E(X_n)=E(x_n+n)=E(x_n)+n=\frac{4n}{3}$, $D(X_n)=D(x_n+n)=D(x_n)=\frac{2n}{9}$.

10.【解】(1)由题可知,单件产品为次品的概率为 $1-0.985=0.015$,所以 $X\sim B(10,0.015)$,

$P(X=0)=C_{10}^{0}\times0.015^{0}\times0.985^{10}\approx0.86$, $P(X=1)=C_{10}^{1}\times0.015^{1}\times0.985^{9}\approx0.1305$,

所以 $P(X\geqslant2)=1-P(X=0)-P(X=1)\approx0.0095$.

提示:在求离散型随机变量对应的概率时,若直接求解比较复杂,可考虑用间接法

由 $P(X\geqslant2)\approx0.0095$ 可知,如果设备状态正常,一天内抽取的 10 个零件中,出现 2 个及 2 个以上的次品的概率约为 0.009 5,该事件是小概率事件,因此一旦发生这种状况,就有理由认为设备在这一天的生产过程出现了异常情况,需对设备进行检测和修理,可见上述监控生产过程的规定是合理的.

(2)若先检测甲部件,设检测费和修理费之和为 ξ 元,则 ξ 的所有可能取值为 8 000,9 000,

则 $P(\xi=8000)=p$, $P(\xi=9000)=1-p$,

所以 $E(\xi)=8000p+9000(1-p)=9000-1000p$.

若先检测乙部件,设检测费和修理费之和为 η 元,则 η 的所有可能取值为 7 000,11 000,

则 $P(\eta=7000)=1-p$, $P(\eta=11000)=p$,

所以 $E(\eta)=7000(1-p)+11000p=7000+4000p$,

所以 $E(\xi)-E(\eta)=2000-5000p$,

则当 $0<p<\frac{2}{5}$ 时,$E(\xi)>E(\eta)$,应先检测乙部件;

当 $p=\frac{2}{5}$ 时,$E(\xi)=E(\eta)$,先检测甲部件或乙部件均可;

当 $\frac{2}{5}<p<1$ 时,$E(\xi)<E(\eta)$,应先检测

甲部件.

7.4.2 超几何分布

对点上分

1. D 【解析】对于 A,将一枚硬币连抛 3 次,正面向上的次数 X 服从二项分布,A **错误**;

对于 B,盒中有 4 个白球和 3 个黑球,每次从中摸出 1 个球且不放回,随机变量 X 表示第一次摸出黑球时摸取的总次数,不是超几何分布,B **错误**;

对于 C,某射手的命中率为 0.8,现对目标射击 1 次,随机变量 X 的值可能是 0 和 1,所以 X 服从两点分布,C **错误**;

对于 D,从 7 名男生、3 名女生共 10 名学生干部中随机选出 5 名学生干部,记选出女生的人数为 X,则 X 服从超几何分布,D **正确**. **故选** D.

关键点拨 超几何分布必须满足以下两点:

(1)总数为 N 件的物品只分为两类:$M(M\leqslant N)$ 件甲类(或次品),其余的 $(N-M)$ 件为乙类(或正品);

(2)随机变量 X 表示从 N 件物品中任取 $n(n\leqslant N)$ 件,其中所含甲类物品(或次品)的件数.

2. C 【解析】设这一箱猕猴桃中有 n 个烂果. 由超几何分布,得 $\frac{C_n^1C_{20-n}^1}{C_{20}^2}=\frac{n(20-n)}{190}=\frac{42}{95}$,

提示:超几何分布概率公式 $P(X=k)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$, $k=m,m+1,m+2,\cdots,r$(其中 $n,N,M\in\mathbf{N}^*$, $M\leqslant N,n\leqslant N,m=\max\{0,n-N+M\}$, $r=\min\{n,M\}$)的应用

解得 $n=6$ 或 $n=14$. 因为烂果率低于 50%,所以 $n<10$,则 $n=6$. **故选** C.

3. C 【解析】C_{10}^3 表示从这 10 个球中随机摸出 3 个球,C_6^3 表示从 6 个红球中摸出 3 个球,

关键点 理解每个组合运算的意义是求解问题的关键

则 $C_{10}^3-C_6^3$ 表示从这 10 个球中随机摸出 3 个球,至少有 1 个白球的摸法种

数，所以$\frac{C_{10}^3-C_6^3}{C_{10}^3}=P(X\geqslant 1)$，**故选 C.**

一题多解 A 选项，$P(X=1)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$；

B 选项，$P(X\leqslant 1)=\frac{C_6^2C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{2}{3}$；

C 选项，$P(X\geqslant 1)=\frac{C_{10}^3-C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$或

$P(X\geqslant 1)=\frac{C_6^2C_4^1+C_6^1C_4^2+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}$；

D 选项，$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$.

故选 C.

4. B 【解析】选项 A，恰有 1 个是坏玩具的概率为$\frac{C_3^1\cdot C_7^3}{C_{10}^4}=\frac{3\times 35}{210}=\frac{1}{2}$；

选项 B，4 个全是好玩具的概率为$\frac{C_3^0\cdot C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1\times 35}{210}=\frac{1}{6}$；

选项 C，恰有 2 个是坏玩具的概率为$\frac{C_3^2\cdot C_7^2}{C_{10}^4}=\frac{3\times 21}{210}=\frac{3}{10}$；

选项 D，至多有 2 个是坏玩具的概率为$1-\frac{C_3^3\cdot C_7^1}{C_{10}^4}=1-\frac{1\times 7}{210}=\frac{29}{30}$. **故选 B.**

5. **思路导引** 根据已知，X 的可能取值为 1，2，3，应用超几何分布的概率求法求分布列.

【解】由题知 X 的可能取值为 1，2，3，

则 $P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$，

$P(X=3)=\frac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\frac{1}{5}$，

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

方法总结 **超几何分布的求解步骤**

（1）辨模型：结合实际情境分析所求的概率分布问题是否由具有明显差异的两部分组成，如“男

生、女生”“正品、次品”“优、劣”等，或可转化为具有明显差异的两部分. 具有该特征的概率模型为超几何分布模型；

（2）算概率：可以直接借助公式 $P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，$k=m, m+1, m+2, \cdots, r$（其中，$n, N, M\in\mathbf{N}^*$，$M\leqslant N, n\leqslant N, m=\max\{0, n-N+M\}$，$r=\min\{n, M\}$）求解，也可以利用排列组合及概率的知识求解，需注意借助公式求解时应理解参数 M, N, n, k 的含义；

（3）列分布列：把求得的概率值通过表格表示出来.

6. ACD

思路导引 根据已知条件，利用超几何分布的定义判断 A；根据超几何分布求出概率和均值即可判断 B, C；根据 $Z=2X+Y$，且 $X+Y=4$，利用均值的性质判断 D.

【解析】A 选项，由题意知，随机变量 X 为取出白球的个数，

从 10 个球（6 个黑球、4 个白球）中不放回地抽取 4 个，

则 X 服从超几何分布，**故 A 正确**.

B, C 选项，X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

所以 $P(X=0)=\frac{C_4^0 C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14}$，$P(X=1)=\frac{C_4^1 C_6^3}{C_{10}^4}=\frac{80}{210}=\frac{8}{21}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3 C_6^1}{C_{10}^4}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$，

$P(X=4)=\frac{C_4^4 C_6^0}{C_{10}^4}=\frac{1}{210}$，

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{8}{21}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{1}{210}=\frac{8}{5}$ $\Big($**另解：**由超几何分布的均值公式可得 $E(X)=\frac{4\times 4}{10}=\frac{8}{5}\Big)$.

由题意得 $X+Y=4$,所以 $Y=4-X$,则 Y 的可能取值为 0,1,2,3,4,

所以 $P(Y=0)=P(X=4)=\frac{1}{210}$,$P(Y=1)=P(X=3)=\frac{4}{35}$,

$P(Y=2)=P(X=2)=\frac{3}{7}$,$P(Y=3)=P(X=1)=\frac{8}{21}$,

$P(Y=4)=P(X=0)=\frac{1}{14}$,

所以 $E(Y)=0\times\frac{1}{210}+1\times\frac{4}{35}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{8}{21}+4\times\frac{1}{14}=\frac{12}{5}$ $\left(\right.$**另解**:由超几何分布的均值公式可得 $E(Y)=\frac{4\times6}{10}=\frac{12}{5}\left.\right)$,

所以 $E(X)<E(Y)$,**故 B 错误,C 正确.**

D 选项,由题意 $Z=2X+Y$,且 $X+Y=4$,故 $Z=2X+4-X=X+4$,

则 $E(Z)=E(X+4)=E(X)+4=\frac{8}{5}+4=\frac{28}{5}$,**D 正确. 故选 ACD.**

方法点拨 **求超几何分布的均值与方差的方法**

(1)列出随机变量 X 的分布列,利用均值与方差的一般计算公式直接求解;

(2)利用公式求解:若 $X\sim H(n,M,N)$,则 $E(X)=\frac{nM}{N}$,$D(X)=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$(其中,$n,N,M\in\mathbf{N}^*$,$M\leqslant N$,$n\leqslant N$).

7. $\frac{9}{25}$

思路导引 根据已知求出 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的值,通过比较得出其中大于 x_5 的个数,进而得出 X 的可能取值情况,根据超几何分布概率公式求出分布列,根据期望公式得出 $E(X)$ 的值,进而代入方差公式求解即可得出答案.

【解析】由已知可得，$x_1=3.1$，$x_2=3.14$，$x_3=3.142$，$x_4=3.1416$，$x_5=3.14159$，所以 $x_1<x_5$，$x_2<x_5$，$x_3>x_5$，$x_4>x_5$.

所以从这 5 个近似值中任取 3 个，记这 3 个值中大于 x_5 的个数为 X，则 X 的可能取值为 0，1，2.

显然 X 服从超几何分布，

所以 $P(X=0)=\frac{C_2^0C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$，

故 $D(X)=\left(0-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{1}{10}+\left(1-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}+\left(2-\frac{6}{5}\right)^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{25}$.

8. 3 【解析】设口袋中有白球 x 个（$2\leqslant x\leqslant5$），由已知可得，取到白球的个数 X 的可能取值为 0，1，2，$P(X=0)=\frac{C_{7-x}^2}{C_7^2}$，$P(X=1)=\frac{C_x^1C_{7-x}^1}{C_7^2}$，$P(X=2)=\frac{C_x^2}{C_7^2}$，

$\therefore E(X)=0\times\frac{C_{7-x}^2}{C_7^2}+1\times\frac{C_x^1C_{7-x}^1}{C_7^2}+2\times\frac{C_x^2}{C_7^2}=\frac{6}{7}$，$\therefore x(7-x)+x(x-1)=18$，解得 $x=3$，则口袋中白球的个数为 3 $\left(\text{另解：由已知可得}\frac{2x}{7}=\frac{6}{7}\text{，解得 }x=3\text{，则口袋中白球的个数为 }3\right)$.

易错警示 对超几何分布理解不到位，分类不全面而致错

在应用超几何分布时，需将总体分为两部分：成功元素（如正品）和非成功元素（如次品）. 若忽视这种分类，可能导致概率计算错误.

9. ABD

攻略上分 方案一中的抽取方式为有放回抽取，所涉及的随机变量服从二项分布；方案二中的抽取方式为不放回抽取，所涉及的随机变量服从超几何分布.

【解析】选项 A，方案一中，有放回地摸球，每次摸取到红球的概率为$\frac{5}{8}$，摸 3 次球，则取得红球的个数 $X\sim B\left(3,\frac{5}{8}\right)$，故 $P(X=k)=C_3^k\left(\frac{5}{8}\right)^k\left(\frac{3}{8}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$，**选项 A 正确.**

选项 C，由选项 A 知，方案一中，$P(X=k)=C_3^k\left(\frac{5}{8}\right)^k\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$.

方案二中，不放回地摸球，取得红球个数 Y 服从超几何分布，则 $P(Y=k)=\frac{C_5^kC_3^{3-k}}{C_8^3}$，$k=0,1,2,3$. 当 $k=0$ 时，$P(X=0)=\left(\frac{3}{8}\right)^3=\frac{27}{512}$，$P(Y=0)=\frac{C_5^0C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$，$P(X=0)>P(Y=0)$，**故选项 C 错误.**

选项 B，由二项分布及超几何分布的均值公式得 $E(X)=3\times\frac{5}{8}=\frac{15}{8}$，$E(Y)=\frac{3\times5}{8}=\frac{15}{8}$，**故选项 B 正确.**

选项 D，$D(X)=3\times\frac{5}{8}\times\left(1-\frac{5}{8}\right)=\frac{45}{64}$，$D(Y)=3\times\frac{5}{8}\times\left(1-\frac{5}{8}\right)\times\frac{8-3}{8-1}=\frac{225}{448}$，得 $D(X)>D(Y)$，**故选项 D 正确. 故选 ABD.**

10.【解】(1) 由题意可知，$\xi=0,1,2$，

$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$，

$P(\xi=1)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，

所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

期望 $E(\xi)=0\times\frac{1}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{3}$，方差 $D(\xi)=\left(0-\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{1}{15}+\left(1-\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{8}{15}+\left(2-\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{16}{45}$.

(2) 设 X 为经过培训后合格的人数，则不合格人数为 $60-X$，易知 $X\sim$

$B\left(60,\dfrac{2}{3}\right)$，期望 $E(X)=60\times\dfrac{2}{3}=40$，

设 A,B 两部门员工经培训后为公司创造的年利润为 Y，$Y=20X+10(60-X)=10X+600$（万元），

则期望 $E(Y)=E(10X+600)=10E(X)+600=10\times40+600=1\ 000$（万元），所以公司的年利润为 $1\ 000-2\times60=880$（万元）.

所以估计该公司 A,B 两部门员工经培训后为公司创造的年利润为 880 万元.

7.5　正态分布

对点上分

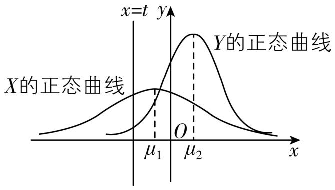
1. C　【解析】由正态分布的性质可知，$f(x)=P(\xi\leqslant x)$ 单调递增，所以图象没有对称轴，**故 A，B 错误**. 因为 ξ 的分布密度曲线的对称轴是直线 $x=1$，所以 $P(\xi\leqslant x)+P(\xi\leqslant 2-x)=1$，

提示：正态曲线与 x 轴之间的区域的面积为 1 的应用

即 $f(x)+f(2-x)=1$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ 成中心对称，**故 C 正确**，D **错误**. **故选** C.

知识点拨　正态曲线具有下列性质：①曲线在 x 轴上方，并且关于直线 $x=\mu$ 对称；②曲线在 $x=\mu$ 时处于最高点，由这一点向左、右两边延伸时，曲线逐渐接近 x 轴；③曲线对称轴位置由 μ 确定，曲线的形状由 σ 确定.

2. D　【解析】由正态曲线的对称性知，$\mu_1<0<\mu_2$，由图象形状可得 $\sigma_1>\sigma_2>0$，如图.



对于 A，由图象可得 $P(X\leqslant\mu_1)<P(X\leqslant\mu_2)$，**故 A 错误**；对于 B，若 $\sigma_1>\sigma_2>\mu_2$，则 $P(Y\geqslant\sigma_1)<P(Y\leqslant\sigma_2)$，**故 B**

错误;对于 C,由图结合图象的对称性知,$P(Y\geqslant -2)>P(X\geqslant -2)$,故 C 错误;对于 D,若 $t<0$,结合图象的对称性知 $P(Y\leqslant t)\leqslant P(X\leqslant t)$,故 D 正确. 故选 D.

易错警示 参数 σ 与正态曲线形状的关系

σ 越小,峰值越高,正态曲线越"瘦高"(集中);σ 越大,峰值越低,正态曲线越"矮胖"(分散). 同时注意注意区分均值 μ 与参数 σ.

3. A

攻略上分 已知正态分布在一个指定区间上的概率,求其在另一个指定区间上的概率,可考虑利用通法攻略 21 中的对称性求解.

【解析】因为 $P(0.5<X\leqslant 1.5)=0.4$,所以 $P(1\leqslant X\leqslant 1.5)=0.2$,故 $P(X>1.5)=$

方法: 利用正态曲线的对称性求概率的关键是利用正态曲线的对称轴 $x=\mu$ 确定所求概率对应的随机变量的区间与已知概率对应的随机变量的区间的关系,必要时可借助图形判断

$0.5-P(1\leqslant X\leqslant 1.5)=0.3$,故选 A.

4. A

攻略上分 本题先结合正态曲线的对称性,求得参数 m,再利用通法攻略 21 中的 3σ 原则求解.

【解析】因为随机变量 $\xi\sim N(2,16)$,

易错: 注意标准差 σ 与方差 σ^2 的误用,在概率区间公式 $P(\mu-k\sigma\leqslant X\leqslant\mu+k\sigma)$,$k\in\{1,2,3\}$ 中直接代入方差值致错

$P(\xi<2m)=P(\xi>4-m)$,所以 $2m+4-m=4$,

提示: 若两点关于直线 $x=a$ 对称,则两点的横坐标之和为 $2a$

解得 $m=0$,所以 $P(\xi<m-2)=P(\xi<-2)=P(\xi<2-4)=\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$,故选 A.

5. $\dfrac{1}{4}$

攻略上分 本题先结合正态曲线的对称性得到 $P(X\leqslant 1)$ 与 $P(X\geqslant 5)$ 的关系，再结合概率和（面积和）为 1 求解.

【解析】已知 $X\sim N(3,\sigma^2)$，所以该正态曲线关于直线 $x=3$ 对称. 因为直线 $x=1$ 与 $x=5$ 关于直线 $x=3$ 对称，所以 $P(X\leqslant 1)=P(X\geqslant 5)=p$.

提示：正态曲线关于直线 $x=\mu$ 对称，从而在关于直线 $x=\mu$ 对称的区间上概率相等

由于随机变量 X 的所有可能值的概率之和为 1，即 $P(X\leqslant 1)+P(1<X<5)+P(X\geqslant 5)=1$. 将 $P(X\leqslant 1)=P(X\geqslant 5)=p$，$P(1<X<5)=2p$ 代入上式可得，$p+2p+p=1$，即 $4p=1$，解得 $p=\dfrac{1}{4}$.

6. BCD 【解析】对于 A，由 $\Phi(a)=0.7$，即 $P(Z<a)=0.7$，可得 $P(Z>a)=1-P(Z<a)=0.3$，所以 $P(|Z|<a)=1-2P(Z>a)=0.4$，**故 A 错误；**

对于 B，$\Phi(a)+\Phi(-a)=P(Z<a)+P(Z<-a)=P(Z<a)+P(Z>a)=1$，**故 B 正确；**

对于 C，由题意可知，$P(Z>a)=1-\Phi(a)=0.4$，即 $\Phi(a)=0.6$，

对比表格可知，$0.25<a<0.26$，即 $0.25<\dfrac{X-103}{20}<0.26$，解得 $108<X<108.2$，所以本次检测达到升一本要求的数学成绩约为 108 分，**故 C 正确；**

对于 D，由题意可知，$a=\dfrac{110-103}{20}=0.35$，且 $\Phi(0.35)\approx 0.636\ 8$，可得 $P(Z>0.35)=1-\Phi(0.35)\approx 0.363\ 2$，

方法：由于标准正态曲线以直线 $x=0$ 为对称轴，在直线 $x=0$ 两侧的对称区间上概率相等，如若需计算 $x\leqslant a$ 的概率，可转化为计算 $x>a$ 的概率，两者概率之和为 1

则 $10\ 000\times 0.363\ 2=3\ 632$，所以该学生在全市排名大概位于 3 630～3 640 名之间，**故 D 正确. 故选 BCD.**

7. 8 186 【解析】由题知 $\mu=90$，$\sigma=2$，则

$86=\mu-2\sigma$，$92=\mu+\sigma$，则 $P(86\leqslant X\leqslant 92)=P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=\frac{1}{2}[P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)+P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)]\approx\frac{1}{2}\times(0.9545+0.6827)=0.8186$，因此，单果质量在[86，92]范围内的大枣个数约为 $10000\times0.8186=8186$.

关键点拨 解决此类问题一定要把握服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 X 在三个特殊区间的取值概率，将所求概率向 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)$，$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)$ 转化，然后利用特定值求出相应概率. 同时，要充分利用正态曲线的对称性和曲线与 x 轴之间的面积为 1 这些特殊性质.

8.【解】(1)甲能够获得奖励，理由如下：

设此次闯关活动的分数 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

由题意可知 $\mu=171$，因为 $\frac{57}{2500}=0.0228$，且 $P(X>\mu+2\sigma)=\frac{1-P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)}{2}\approx\frac{1-0.9545}{2}\approx0.0228$，

所以 $\mu+2\sigma=351$，则 $\sigma=\frac{351-171}{2}=90$.

关键点 利用 3σ 原则求出 σ 的值

而 $\frac{400}{2500}=0.16$，且 $P(X>\mu+\sigma)=\frac{1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}\approx\frac{1-0.6827}{2}\approx0.1587<0.16$，

可知前 400 名参赛者的最低得分低于 $\mu+\sigma=261$，而甲的得分为 270 分，所以甲能够获得奖励.

(2)假设乙所说为真，则 $\mu=201$，

$P(X>\mu+2\sigma)=$

$\frac{1-P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)}{2}\approx$

$\frac{1-0.954\ 5}{2}\approx 0.022\ 8$,

而$\frac{57}{2\ 500}=0.022\ 8$,所以 $\sigma=\frac{351-201}{2}=75$,从而 $\mu+3\sigma=201+3\times75=426<430$,

而 $P(X>\mu+3\sigma)=\frac{1-P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)}{2}\approx\frac{1-0.997\ 3}{2}\approx 0.001\ 4<0.005$,

所以 $X>\mu+3\sigma$ 为小概率事件,即丙的分数为 430 分是小概率事件,可认为其一般不可能发生,但却又发生了,所以可认为乙所说为假.

9.【解】(1)依题意,体质测试成绩不合格的学生有 3 名,则 X 的可能取值为 0,1,2,3.

则 $P(X=0)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$,$P(X=1)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$,$P(X=2)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$,$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$,

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

(2)依题意,$\bar{x}=\frac{1}{10}\times(38+41+44+51+54+56+58+64+74+80)=56$,$s^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{10}\times1\ 690=169$,

则 $\mu=56$,$\sigma=13$,记该校高中生体质测试成绩为 Z,

于是 $P(30\leqslant Z\leqslant 82)=P(\mu-2\sigma\leqslant Z\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0.954\ 5$,

则学生的体质测试成绩恰好落在区间[30,82]的概率约为 0.954 5,$Y\sim B(10\ 000,0.954\ 5)$,

所以 $E(Y)=10\ 000\times0.954\ 5=9\ 545$.

7.4+7.5 节测上分

1. D 【解析】由于 $P(A)=p$,则 $P(\bar{A})=1-p$,

提示:对立事件概率公式的应用

所以在 n 重伯努利试验中，事件 $\overline{A}$ 发生 k 次的概率为 $C_n^k(1-p)^k p^{n-k}$. **故选 D.**

2. A　【解析】因为随机变量 X 服从超几何分布，即 $X\sim H(2,3,6)$，

关键点 分清是哪种分布问题是求解问题的关键

所以 $P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_3^0}{C_6^2}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$. **故选 A.**

3. AC　【解析】对于 A，由 $X\sim N(160,900)$，得 $E(X)=160$，**故 A 正确；**

对于 B，由 $Y\sim N(160,400)$，得 $D(Y)=400$，**故 B 错误；**

对于 C，因为 $X\sim N(160,900)$，

所以 $P(X<120)+P(X\leqslant 200)=P(X>200)+P(X\leqslant 200)=1$，**故 C 正确；**

对于 D，由于随机变量 X，Y 均服从正态分布，且正态曲线的对称轴均为直线 $x=160$，

$D(X)=900>D(Y)=400$，所以 Y 的正态曲线的峰值较高，

正态曲线较“瘦高”，随机变量分布比较集中，所以 $P(X\leqslant 180)<P(Y\leqslant 180)$，**故 D 错误. 故选 AC.**

4. D　【解析】由题意可得，若 5 次移动结束正好停在“7 点”格子中，必然是 3 次向右移动 1 格，2 次向右移动 2 格，

设其概率 $P=f(p)=C_5^3p^3(1-p)^2(p\in(0,1))$，

故 $f'(p)=10[3p^2(1-p)^2-2(1-p)\cdot p^3]=10p^2(1-p)(3-5p)$，

当 $p\in\left(0,\dfrac{3}{5}\right)$ 时，$f'(p)>0$，$f(p)$ 单调递增，当 $p\in\left(\dfrac{3}{5},1\right)$ 时，$f'(p)<0$，$f(p)$ 单调递减，

所以当 $p=\dfrac{3}{5}$ 时，$f(p)$ 取到最大值. **故选 D.**

5. C

思路导引　由题意可知从乙盒子中取出的红球个数 $X\sim H(n,3,6)$，可得出 $E(X)=\dfrac{n}{2}$，再从甲盒子里随机取 1 个球，取到红球的个数 ξ 服从两点分布，可得出 $E(\xi)=P(\xi=1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n+2}$，$D(\xi)=[1-

$P(\xi=1)]P(\xi=1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{(2n+2)^2}$，从而可判断出 $E(\xi)$ 和 $D(\xi)$ 的单调性.

【解析】由题意可知，从乙盒子里随机取出 n 个球，含有红球个数 X 服从超几何分布，即 $X\sim H(n,3,6)$，其中 $P(X=k)=\frac{C_3^kC_3^{n-k}}{C_6^n}$，其中 $k\in\mathbf{N}$，$k\leqslant 3$ 且 $k\leqslant n$，$E(X)=\frac{3n}{6}=\frac{n}{2}$，故从甲盒中取球，相当于从含有$\left(\frac{n}{2}+1\right)$个红球的 $(n+1)$ 个球中取 1 个球，取到红球个数为 ξ，故 $P(\xi=1)=\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+2}$，随机变量 ξ 服从两点分布，所以 $E(\xi)=P(\xi=1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+2}$，随着 n 的增大，$E(\xi)$ 减小；$D(\xi)=[1-P(\xi=1)]P(\xi=1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{(2n+2)^2}$，随着 n 的增大，$D(\xi)$ 增大，**故选 C.**

6. ABD　【解析】对于 A，由 $X\sim NB\left(2,\frac{1}{3}\right)$，则 $P(X=3)=C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{27}$，**故 A 正确**；

对于 B，由 $X\sim NB\left(1,\frac{1}{2}\right)$，则 $P(X=k)=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^1=\left(\frac{1}{2}\right)^k$，$k=1,2,3,\cdots$，**故 B 正确**；

对于 C，若 $X\sim NB(r,p)$，则 $P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}p=C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$，$k=r,r+1,r+2,\cdots$，**故 C 错误**；

对于 D，若 $X\sim NB(r,p)$，$P(X=k)$ 最大时，当且仅当 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k+1)\end{cases}$ 成立，

即 $\begin{cases}C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}\geqslant C_{k-2}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r-1},\\C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}\geqslant C_k^{r-1}p^r(1-p)^{k-r+1},\end{cases}$

解得 $\frac{r-1}{p}\leqslant k\leqslant 1+\frac{r-1}{p}$，

故当 k 取不小于 $\frac{r-1}{p}$ 的最小正整数时，$P(X=k)$ 最大，**故 D 正确. 故选 ABD.**

7. C

思路导引 由题意分析可知 X 服从二项分布，Y 服从超几何分布，由二项分布和超几何分布的性质依次分析各个选项，对于选项 ABD，可利用赋值法验证.

【解析】 对于甲，从中依次有放回地摸出 n 张，每次摸到数字卡牌的概率为 $\frac{a}{a+b}$，重复做 n 次，所以 $X\sim B\left(n,\frac{a}{a+b}\right)$.

对于乙，从中一次性摸出 n 张卡牌，不放回，所以 Y 服从超几何分布.

对于 A，$P(X=1)=C_n^1\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-1}\frac{a}{a+b}$，

$P(Y=1)=\frac{C_a^1C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n}$，

不妨取 $a=2,b=1,n=2$，则 $P(X=1)=C_n^1\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-1}\frac{a}{a+b}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\neq P(Y=1)=\frac{C_a^1C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n}=\frac{2}{3}$，**故 A 错误**；

对于 B，$P(X=n)=C_n^n\left(\frac{b}{a+b}\right)^0\cdot\left(\frac{a}{a+b}\right)^n=\left(\frac{a}{a+b}\right)^n$，

$P(Y=n)=\frac{C_a^nC_b^0}{C_{a+b}^n}=\frac{C_a^n}{C_{a+b}^n}$，

不妨取 $a=2,b=1,n=2$，则 $P(X=n)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\neq P(Y=n)=\frac{C_a^n}{C_{a+b}^n}=\frac{1}{3}$，**故 B 错误**；

对于 C，由二项分布的均值公式可得 $E(X)=n\times\frac{a}{a+b}=\frac{na}{a+b}$，由超几何分布的均值公式可得 $E(Y)=\frac{na}{a+b}$，**故 C 正确**；

对于 D，不妨取 $a=2,b=1,n=2$，则 $E(X)=E(Y)=\frac{4}{3}$，

$D(X)=2\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}\neq D(Y)=\left(\frac{4}{3}-1\right)^2\times\frac{2}{3}+\left(\frac{4}{3}-2\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，**故 D 错误. 故选 C.**

8. 思路导引 (1)X 的可能取值为 1,2,3,求得相应的概率,列出分布列,求得 $E(X)$,$D(X)$ 及 $E(2X-1)$,$D(2X-1)$ 的值;(2)设乙公司能正确回答的题目数为随机变量 Y,Y 服从二项分布,同理可列出分布列并求得 $E(Y)$,$D(Y)$ 的值,结合 $E(X)=E(Y)$,且 $D(X)<D(Y)$,即可得到结论.

【解】(1)由题意,X 的可能取值为 1,2,3,

则 $P(X=1)=\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{5}$,

$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$,

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

可得 $E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$,

$D(X)=(1-2)^2\times\frac{1}{5}+(2-2)^2\times\frac{3}{5}+(3-2)^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$,

$E(2X-1)=2E(X)-1=2\times2-1=3$,

$D(2X-1)=4D(X)=\frac{8}{5}$.

(2)设乙公司能正确回答的题目数量为随机变量 Y,则 Y 服从二项分布,

故 $P(Y=0)=C_3^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,

$P(Y=1)=C_3^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$,

$P(Y=2)=C_3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$,

$P(Y=3)=C_3^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$,

所以随机变量 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

所以 $E(Y)=0\times\frac{1}{27}+1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{4}{9}+3\times\frac{8}{27}=2$,

$D(Y)=(0-2)^2\times\frac{1}{27}+(1-2)^2\times\frac{2}{9}+(2-2)^2\times\frac{4}{9}+(3-2)^2\times\frac{8}{27}=\frac{2}{3}$,

因为 $E(X)=E(Y)$,且 $D(X)<D(Y)$,所以甲公司竞标成功的可能性更大.

9. **思路导引** (1)求各组数据区间的中点值乘相应的频率之和,即可得 $\bar{x}$;(2)①根据正态分布求出每位农民的年收入不少于 17.56 千元的概率,记 1 000 位农民中年收入不少于 17.56 千元的人数为 ξ,可得 $\xi\sim B(1\ 000,p)$,其中 $p=0.977\ 25$,然后根据二项分布的概率计算公式,计算出"恰好有 k 位农民的年收入不少于 17.56 千元"的概率最大时 k 的值即可;②根据正态曲线的对称性分析求解即可.

【解】(1)由题中频率分布直方图可知,

$\bar{x}=17\times0.02+18\times0.09+19\times0.22+20\times0.33+21\times0.24+22\times0.08+23\times0.02=20$,

故估计 50 位农民的年平均收入为 20 千元.

(2)由题意知 $X\sim N(20,1.22^2)$,

①由 $P(X\geqslant17.56)=P(X\geqslant\mu-2\sigma)\approx0.5+\frac{0.954\ 5}{2}=0.977\ 25$,

得每位农民的年收入不少于 17.56 千元的概率约为 0.977 25,

记 1 000 位农民中年收入不少于 17.56 千元的人数为 ξ,则 $\xi\sim B(1\ 000,p)$,其中 $p=0.977\ 25$.

于是恰好有 k 位农民的年收入不少于 17.56 千元的事件概率为 $P(\xi=k)=C_{1\ 000}^{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{10^3-k}$.

令 $\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=\frac{(1\ 001-k)\times p}{k\times(1-p)}>1$,得 $k<$

$1\ 001p$，而 $1\ 001p=978.227\ 25$，

所以当 $0\leqslant k\leqslant 978$ 时，$P(\xi=k-1)<P(\xi=k)$，

当 $979\leqslant k\leqslant 1\ 000$ 时，$P(\xi=k-1)>P(\xi=k)$.

由此可知，在所走访的 1 000 位农民中，年收入不少于 17. 56 千元的人数最有可能是 978.

②因为 $P(X>\mu-\sigma)\approx\frac{1}{2}+\frac{0.682\ 7}{2}=0.841\ 35$，

所以当最低年收入标准大约为 $20-1.22=18.78$（千元）时，满足题意，即最低年收入标准大约为 18. 78 千元.

专题上分 2 概率与统计、数列、导数的综合

1. BCD 【解析】$P(AB)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1\cdot A_8^8}{A_{10}^{10}}=\frac{4\times3\times A_8^8}{10\times9\times A_8^8}=\frac{2}{15}$，A 错误.

$P(A)=\frac{C_4^1\cdot A_9^9}{A_{10}^{10}}=\frac{4\times A_9^9}{10\times A_9^9}=\frac{2}{5}$，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$，B 正确.

对于事件 B，可分为第一位出场的是男生，第二位出场的是女生或第一位出场的是女生，第二位出场的是女生两种情况，$\therefore P(B)=\frac{C_6^1\cdot C_4^1\cdot A_8^8+C_4^1\cdot C_3^1\cdot A_8^8}{A_{10}^{10}}=\frac{6\times4\times A_8^8+4\times3\times A_8^8}{10\times9\times A_8^8}=\frac{2}{5}$，$\therefore P(A)=P(B)$，C 正确.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{2}{3}$，D 正确. 故选 BCD.

2. 30　$\frac{2}{3}$

思路导引 第一空，利用间接法即可得解；第二空，利用分类加法计数原理，结合排列组合的知识与条件概率的概率公式即可得解.

【解析】依题意，不考虑甲、乙两人不能参加同一项目的比赛，

则甲、乙、丙、丁四位同学参加三个项目的比赛的所有的方案共 $C_4^2A_3^3=36$(种)，

其中甲、乙两人参加同一项目的比赛的方案共 $A_3^3=6$(种)，

故所求的参赛方案一共有 $36-6=30$(种).

对于事件 A，因为甲、乙两人不能参加同一项目的比赛，且丙、丁两人不能参加同一项目的比赛，

则甲、乙必有其中一人和丙、丁其中一人参加同一项目的比赛，

共有 $C_2^1C_2^1A_3^3=24$(种)方案.

对于事件 AB，若甲单独选择参加跳台滑雪项目的比赛，

则丙、丁两人可分别选择参加越野滑雪或者单板滑雪项目的比赛，乙也可以在这两个项目的比赛中选一个参加，

故有 $A_2^2C_2^1=4$(种)不同的方案；

若甲和另外一人一起选择参加跳台滑雪项目的比赛，

则甲只可能和丙或丁两人中的一人一起参加，剩下两个人分别选择剩余的两个项目的比赛，

故有 $C_2^1A_2^2=4$(种)不同的方案.

同理，若乙单独选择参加跳台滑雪项目的比赛，有 $A_2^2C_2^1=4$(种)不同的方案；

若乙和另外一人一起选择参加跳台滑雪项目的比赛，有 $C_2^1A_2^2=4$(种)不同的方案.

故共有 16 种不同的方案.

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{16}{30}}{\frac{24}{30}}=\dfrac{2}{3}$.

3. $\dfrac{4}{7}$　$\dfrac{10}{7}$

思路导引 第一空，先确定 3 个小球标记的不同数字的方案数，然后再从每个数字对应的小球中取 1 个，通过计算可求得符合要求的取法数，再比上总的取法数可得结果；第二空，先确定 X 的可能取值

为 1,2,3,然后计算出 X 不同取值时的概率,注意 X 的每种取值对应两种情况,由此可求得 X 的分布列及期望 $E(X)$.

【解析】(1)记"取出的 3 个小球上标记的数字两两不同"为事件 M.

先确定 3 个小球标记的不同数字,有 C_4^3 种方案;

然后从每个数字对应的小球中各取 1 个,所以符合要求的取法共有 $C_4^3\times C_2^1\times C_2^1\times C_2^1$ 种,

所以 $P(M)=\dfrac{C_4^3\times C_2^1\times C_2^1\times C_2^1}{C_8^3}=\dfrac{4}{7}$.

(2)由题意可知,X 的可能取值为 1,2,3,

则 $P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_6^2+C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\dfrac{9}{14}$,

提示:分为两种情况,取出的小球中只有 1 个数字为 1 或有 2 个数字为 1

$P(X=2)=\dfrac{C_2^1C_4^2+C_2^2C_4^1}{C_8^3}=\dfrac{2}{7}$,

提示:分为两种情况,取出的小球中只有 1 个数字为 2 或有 2 个数字为 2

$P(X=3)=\dfrac{C_2^1C_2^2+C_2^2C_2^1}{C_8^3}=\dfrac{1}{14}$.

提示:分为两种情况,取出的小球中只有 1 个数字为 3 或有 2 个数字为 3

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\dfrac{9}{14}$	$\dfrac{2}{7}$	$\dfrac{1}{14}$

故 $E(X)=1\times\dfrac{9}{14}+2\times\dfrac{2}{7}+3\times\dfrac{1}{14}=\dfrac{10}{7}$.

4.【解】(1)由甲成绩的频率分布直方图可得 $0.005\times10+0.005\times10+0.02\times10=0.3<0.5$,

$0.005\times10+0.005\times10+0.02\times10+0.045\times10=0.75>0.5$,则甲所得成绩的中位数位于(80,90)之间;

方法:频率分布直方图中中位数位置的确定:从左向右依次累加各组矩形面积(即频率),直至找到第一个使累计频率超过 0.5 的区间

由乙成绩的频率分布直方图可得 $0.01\times10+0.015\times10=0.25<0.5$，$0.01\times10+0.015\times10+0.035\times10=0.6>0.5$，则乙所得成绩的中位数位于$(70,80)$之间，

综上可得甲所得成绩的中位数大于乙所得成绩的中位数，所以甲通过选拔阶段并参加第二阶段游戏.

(2)(i)设事件 $C=\{$参加 A 游戏胜利$\}$，则其对立事件 $\overline{C}=\{$参加 A 游戏失败$\}$.

由题意可得 $P(C)=P(\overline{C})=\frac{1}{2}$，则该运动员不能参加 B 游戏的概率 $P=P(\overline{C})P(\overline{C})+P(\overline{C})P(C)=\frac{1}{2}$.

(ii)设事件 $D=\{$参加 B 游戏胜利$\}$，则其对立事件 $\overline{D}=\{$参加 B 游戏失败$\}$.

由题意可得 $P(D)=P(\overline{D})=\frac{1}{2}$，则

$P_1=P(\overline{C})P(\overline{C})=\frac{1}{4}$，

$P_2=P(\overline{C})P(C)+P(C)P(\overline{D})=\frac{1}{2}$，

$P_3=P(C)P(D)=\frac{1}{4}$，

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+100\times\frac{1}{2}+300\times\frac{1}{4}=125$(元).

5. D 【解析】由题意得每次摸球摸到红球的概率为$\frac{1}{2}$，摸到白球的概率为$\frac{1}{3}$，摸到黑球的概率为$\frac{1}{6}$. 若 $S_4=1$，则$\{a_n\}$的前 4 项中，有 3 项为 0，1 项为 1 或有 2 项为 1，1 项为 0，1 项为-1，故所求概率为 $C_4^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+C_4^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{27}+\frac{2}{12}=\frac{13}{54}$.

提示：解答这类概率综合问题时，一般“大化小”，即将问题划分为若干个彼此互斥的事件，然后运用相应公式来求解

故选 D.

6. B

攻略上分 本题中考虑利用超几何分布的期望公式,数列的单调性等知识来求解.

【**解析**】从甲盒中随机抽取 n 个球,这 n 个球中黑球的个数设为 Y,Y 服从超几何分布,且 $P(Y=k)=\dfrac{C_a^kC_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$($k\in \mathbf{N}$,$k\leqslant n$ 且 $k\leqslant a$),乙盒中有 1 个球且为黑球,放入 n 个球后,$X_n=1+Y$,因为 $E(Y)=n\cdot\dfrac{a}{a+b}$,所以 $E(X_n)=E(1+Y)=1+E(Y)=1+n\cdot\dfrac{a}{a+b}$. 因为 $a>0$,$a+b>0$,所以当 n 从 1 增加到 $a+b$ 时,$n\cdot\dfrac{a}{a+b}$随 n 的增大而增大,所以数列 $\{E(X_n)\}$ 递增. 从乙盒中随机抽取 1 球为黑球的概率是 p_n,乙盒中此时有 $(n+1)$ 个球,黑球有 X_n 个,所以 $p_n=\dfrac{E(X_n)}{n+1}=\dfrac{1+n\cdot\dfrac{a}{a+b}}{n+1}=\dfrac{\dfrac{a}{a+b}\left(\dfrac{a+b}{a}+n\right)}{n+1}=\dfrac{a}{a+b}\cdot\dfrac{\left(n+1+\dfrac{b}{a}\right)}{n+1}=\dfrac{a}{a+b}\left(1+\dfrac{\dfrac{b}{a}}{n+1}\right)$. 因为 $a>0$,$b>0$,所以当 n 从 1 增加到 $a+b$ 时,$\dfrac{\dfrac{b}{a}}{n+1}$随 n 的增大而减小,

关键: 掌握数列的单调性是求解问题的关键

所以 $\{p_n\}$ 递减,**故选 B.**

7. **攻略上分** 由题意可以判断本题中涉及的概率问题具有递推关系,因此考虑利用通法攻略中的方法,结合全概率公式、相互独立事件的概率、递推数列及等比数列等知识来求解.

(1)【**解**】依题意,传球 2 次后球在甲手中包括两种情况,即甲乙甲和甲丙甲,所以传球 2 次后球在甲手中的概率 $P=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(2)【**证明**】(i) 记 A_n 表示事件“第

n 次传球后，球在甲手中”，

易知设 n 次传球后球在甲手中的概率为 P_n，$n\in\mathbf{N}^*$，

则有 $P_1=0$，$A_{n+1}=\overline{A}_n\cdot A_{n+1}+A_n\cdot A_{n+1}$，

所以 $P_{n+1}=P(\overline{A}_n\cdot A_{n+1}+A_n\cdot A_{n+1})=P(\overline{A}_n\cdot A_{n+1})+P(A_n\cdot A_{n+1})=P(\overline{A}_n)\cdot P(A_{n+1}|\overline{A}_n)+P(A_n)\cdot P(A_{n+1}|A_n)=(1-P_n)\cdot\frac{1}{2}+P_n\cdot 0=\frac{1}{2}(1-P_n)$，即 $P_{n+1}=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}$，

所以 $P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$，且 $P_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，

所以数列 $\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

(ii) 由 (i) 得，$P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $P_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 n 为大于 1 的奇数时，$P_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$，

当 n 为偶数时，$P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，

综上所述，当 $n\geqslant 2$ 时，$P_n\leqslant\frac{1}{2}$.

规律方法 概率问题与数列的交汇，综合性较强，主要有以下类型：

(1) 求通项公式：关键是找出概率 P_n 或均值 $E(X_n)$ 的递推关系式，然后根据构造法（一般构造等比数列），求出通项公式；

(2) 求和：主要是利用数列中的倒序相加法求和、错位相减法求和、裂项相消法求和来求解；

(3) 求最值：利用等差、等比数列的性质，通过研究概率 P_n 或均值 $E(X_n)$ 的单调性来求解.

8. 思路导引　(1)(i)利用二项分布知识求解概率即可;(ii)首先由题意求出分布列,再计算数学期望即可.(2)依据题意得到具体的 $f(x)$,再利用导数求解最小值即可.

【解】(1)(i)由题可得甲回答了4道题进入决赛的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$,

甲回答了5道题进入决赛的概率为 $C_4^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,

所以甲至多回答了5道题就进入决赛的概率为 $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{3}{16}$.

(ii)由题可知 X 的可能取值为4,5,6,7,

则 $P(X=4)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$, $P(X=5)=2\times C_4^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(X=6)=2\times C_5^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$, $P(X=7)=C_6^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$,

所以 X 的分布列为

X	4	5	6	7
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

则 $E(X)=4\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{5}{16}+7\times\frac{5}{16}=\frac{93}{16}$.

(2)设乙答对第3道题的概率为 $y(0<y<1)$,则 $x^2y=\frac{1}{8}$,

所以 $f(x)=x^2y+x^2(1-y)+C_2^1x(1-x)\cdot y=-2x^2y+x^2+2xy=x^2+\frac{1}{4x}-\frac{1}{4}$, $0<x<1$,

则 $f'(x)=2x-\frac{1}{4x^2}=\frac{8x^3-1}{4x^2}=\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{4x^2}$,

所以当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

真题上分

1. A 【解析】从该地的中学生中任取一名学生，记 A 表示事件："取到的学生爱好滑冰"，B 表示事件："取到的学生爱好滑雪". 由题设知 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.5$，$P(A\cup B)=0.7$，由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.5-0.7=0.4$.

故所求的概率为 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.4}{0.5}=0.8$. **故选** A.

2. $\frac{3}{5}$　$\frac{1}{2}$　【解析】甲同学从 5 个项目中选 3 个参加，全部的情况有 C_5^3 种，参加"整地做畦"项目的情况有 C_4^2 种，

$\therefore$ 甲同学参加"整地做畦"项目的概率为 $\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$. 用 A 表示事件"乙同学参加的 3 个项目中有整地做畦"，用 B 表示事件"乙同学参加的 3 个项目中有田间灌溉"，则 $P(A)=\frac{3}{5}$，$P(AB)=\frac{C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}$.

3.【解】(1)估计该地区这种疾病患者的平均年龄为 $0.001\times10\times5+0.002\times10\times15+0.012\times10\times25+0.017\times10\times35+0.023\times10\times45+0.020\times10\times55+0.017\times10\times65+0.006\times10\times75+0.002\times10\times85=47.9$(岁).

(2)估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间 $[20,70)$ 的概率 $P=$

$0.012\times10+0.017\times10+0.023\times10+0.020\times10+0.017\times10=0.89$.

(3)设事件 A:此人患这种疾病,事件 B:此人年龄位于区间$[40,50)$,则由题意知 $P(AB)=23\%\times0.1\%=0.023\%$,$P(B)=16\%$,

所以若此人年龄位于$[40,50)$,

则此人患这种疾病的概率 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.023\%}{16\%}\approx0.0014$.

4. $\frac{61}{25}$ 【解析】由题意得 $X=1,2,3$.

关键:$X=1$ 表示三次取出的都是同一个数字的球,$X=2$ 表示三次取出了两个不同数字的球,$X=3$ 表示三次取出的球的数字各不相同

$P(X=1)=C_5^1\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{5}{125}$;$P(X=3)=A_5^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{60}{125}$;

提示:选出3个不同数字的小球并排序

$P(X=2)=C_5^2\times2\times\frac{A_3^3}{A_2^2}\times\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{60}{125}$.

提示:假设所取球的数字为1和2,式中"2"表示两种组合"1,1,2"和"1,2,2","$\frac{A_3^3}{A_2^2}$"表示"除序"

所以 $E(X)=1\times\frac{5}{125}+2\times\frac{60}{125}+3\times\frac{60}{125}=\frac{61}{25}$.

一题多解 令 $X_i=\begin{cases}1,\text{球 } i \text{ 至少被取出一次},\\0,\text{球 } i \text{ 没被取出过},\end{cases}$ 则 $X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$,

$E(X_i)=P(\text{球 } i \text{ 至少被取出一次})=1-P(\text{球 } i \text{ 没被取出过})=1-\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{61}{125}$.

故 $E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)+E(X_5)=5\times\frac{61}{125}=\frac{61}{25}$.

5. ①0.6 ②3.2 【解析】①小桐一周跑

11 圈有两种情况:第一次跑 5 圈、第二次跑 6 圈和第一次跑 6 圈、第二次跑 5 圈,两种情况的概率分别为 $P_1=0.5\times0.6=0.3$,$P_2=0.5\times0.6=0.3$,所以小桐一周跑 11 圈的概率 $P=P_1+P_2=0.3+0.3=0.6$.

②小桐一周跑的圈数的所有可能取值为 10,11,12,其中达标的圈数为 11,12,则小桐一周内运动量达标的概率 $P=1-0.5\times0.4=0.8$. 合格周数 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4,X 服从二项分布 $B(4,0.8)$,所以 X 的数学期望 $E(X)=4\times0.8=3.2$.

知识速记 若随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$,则 X 的数学期望 $E(X)=np$,方差 $D(X)=np(1-p)$.

6.【解】(1)从甲校抽取的 100 人中,有 80 人答对,用频率估计概率,估计甲校高一年级学生该题选择正确的概率 $p=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$.

(2)由题知,X 的所有可能取值为 0,1,2,

从乙校随机抽取 1 人,答对该题目的概率 $P'=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$,

所以 $P(X=0)=\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{20}$,

$P(X=1)=\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{7}{20}$,

$P(X=2)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$,

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{7}{20}+2\times\frac{3}{5}=\frac{31}{20}$,

即 $X=1$ 的概率为 $\frac{7}{20}$,X 的数学期望为 $\frac{31}{20}$.

(3)该题做对分两种情况,一种是掌握知识点并做对,另一种是没有掌握但

随机选一个对了，所以 $p_1\times100\%+(1-p_1)\times\frac{1}{4}=\frac{4}{5}$，

$p_2\times85\%+(1-p_2)\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，

解得 $p_1=\frac{11}{15}$，$p_2=\frac{5}{6}$，所以 $p_2>p_1$.

7.【解】(1) 甲参加第一阶段比赛，则该队进入第二阶段的概率 $P_1=1-(1-0.4)^3=0.784$.

第二阶段乙进行投篮，则乙至少投中一次的概率 $P_2=1-(1-0.5)^3=0.875$，

故甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率 $P=0.784\times0.875=0.686$.

(2)(ⅰ) 若甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分，则第二阶段的 3 次投篮全中.

当甲参加第一阶段比赛时，甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_3=[1-(1-p)^3]q^3$，

当乙参加第一阶段比赛时，甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_4=[1-(1-q)^3]p^3$，

则 $P_3-P_4=[1-(1-p)^3]q^3-[1-(1-q)^3]p^3=3pq(q-p)[p+q(1-p)]$.

因为 $1\geqslant q>p>0$，所以 $q-p>0$，所以 $P_3-P_4>0$，即 $P_3>P_4$，

故应该由甲参加第一阶段比赛.

(ⅱ) 若甲参加第一阶段比赛，则设该队比赛成绩为 X 分，X 的所有可能取值为 0，5，10，15，进入第二阶段的概率为 $1-(1-p)^3$，未进入第二阶段的概率为 $(1-p)^3$，

则 $P(X=0)=(1-p)^3+[1-(1-p)^3](1-q)^3$，

$P(X=5)=[1-(1-p)^3]C_3^1q(1-q)^2$，

$P(X=10)=[1-(1-p)^3]C_3^2q^2(1-q)$，

$P(X=15)=[1-(1-p)^3]q^3$，

则 $E(X)=5\times[1-(1-p)^3]C_3^1q(1-q)^2+10\times[1-(1-p)^3]C_3^2q^2(1-q)+15\times[1-(1-p)^3]q^3=15pq(p^2-3p+3)$.

若乙参加第一阶段比赛，则设该队的比赛成绩为 Y 分，

同理可得 $E(Y)=15pq(q^2-3q+3)$，

则 $E(X)-E(Y)=15pq(p^2-3p-q^2+3q)=15pq(p-q)(p+q-3)$，

因为 $1\geqslant q>p>0$，所以 $pq>0$，$p-q<0$，$p+q-3<0$，

所以 $E(X)-E(Y)>0$，即 $E(X)>E(Y)$.

故应该由甲参加第一阶段的比赛.

8.【解】(1) X 的可能取值为 0，1，2，则

$$P(X=0)=\frac{C_2^0C_{38}^{20}}{C_{40}^{20}}=\frac{19}{78},$$

$$P(X=1)=\frac{C_2^1C_{38}^{19}}{C_{40}^{20}}=\frac{20}{39},$$

$$P(X=2)=\frac{C_2^2C_{38}^{18}}{C_{40}^{20}}=\frac{19}{78},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{19}{78}$	$\frac{20}{39}$	$\frac{19}{78}$

$E(X)=0\times\frac{19}{78}+1\times\frac{20}{39}+2\times\frac{19}{78}=1$ $\Big($**另解**：由 $M=2$，$N=40$，$n=20$，得 $E(X)=\frac{nM}{N}=\frac{20\times2}{40}=1\Big)$.

9. BC **【解析】**由题可得 $X\sim N(1.8,0.1^2)$，$Y\sim N(2.1,0.1^2)$，所以 $P(X>2)=P(X>\mu+2\sigma)<P(X>\mu+\sigma)\approx1-0.8413=0.1587<0.2$，**故 A 错误，B 正确**；$P(Y>2)=P(Y>\mu_1-\sigma_1)\approx0.8413>0.5$，**故 C 正确，D 错误. 故选 BC.**

10. (1)**【解】**设事件 A：打完 3 个球后，甲比乙多得 3 分，即甲赢了 3 个球，则 $P(A)=p^3$，

则 $p_3=p^3$.

设事件 B：打完 4 个球后，甲比乙多得 2 分，即甲赢了 3 个球，输了 1 个球，则 $P(B)=C_4^3p^3(1-p)$，

设事件 C：打完 4 个球后，甲比乙多得 4 分，即甲赢了 4 个球，则 $P(C)=p^4$.

则 $p_4=P(B)+P(C)=4p^3(1-p)+p^4=p^3(4-3p)$.

(2)【解】易知 $q_4=4(1-p)^3p+(1-p)^4=(1-p)^3(3p+1)$，$q_3=(1-p)^3$，

因此 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=\frac{3p^3(1-p)}{3p(1-p)^3}=\frac{p^2}{(1-p)^2}=4$，

解得 $p=2$(舍去)或 $p=\frac{2}{3}$.

(3)【证明】易知 $p_{2m+2}=p_{2m+1}+pC_{2m+1}^{m+1}p^{m+1}\cdot(1-p)^m$，

$q_{2m+2}=q_{2m+1}+qC_{2m+1}^{m+1}q^{m+1}p^m$，

$p_{2m+1}=p_{2m}-(1-p)C_{2m}^{m+1}p^{m+1}(1-p)^{m-1}$，

$q_{2m+1}=q_{2m}-pC_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^{m-1}$，

则 $\frac{p_{2m+1}-p_{2m}}{q_{2m+1}-q_{2m}}=\frac{-C_{2m}^{m+1}(1-p)^mp^{m+1}}{-C_{2m}^{m+1}(1-p)^{m+1}p^m}=\frac{p}{1-p}>1$，

则 $p_{2m+1}-p_{2m}<q_{2m+1}-q_{2m}$，

即 $p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}$.

$(p_{2m+2}-p_{2m})-(q_{2m+2}-q_{2m})$

$=C_{2m+1}^{m+1}p^{m+2}q^m-C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m-(C_{2m+1}^{m+1}q^{m+2}p^m-C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m)$

$=C_{2m+1}^{m+1}p^{m+2}q^m-C_{2m+1}^{m+1}q^{m+2}p^m-(C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m-C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m)$

$=C_{2m+1}^{m+1}p^mq^m(p^2-q^2)-C_{2m}^{m+1}p^mq^m(p-q)$

$=C_{2m+1}^{m+1}p^mq^m(p-q)-C_{2m}^{m+1}p^mq^m(p-q)$

$=p^mq^m(p-q)(C_{2m+1}^{m+1}-C_{2m}^{m+1})>0$，

因此 $p_{2m+2}-p_{2m}>q_{2m+2}-q_{2m}$，

即 $p_{2m+2}-q_{2m+2}>p_{2m}-q_{2m}$.

综上，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

素养上分

1. D 【解析】设机器狗能够找到打开的出口的总尝试次数为 X，

则 X 的所有可能取值为 1，2，3，4，

故 $P(X=1)=\frac{1}{4}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^1C_1^1}{A_4^2}=\frac{1}{4}$，

$P(X=3)=\frac{C_3^1C_2^1C_1^1}{A_4^3}=\frac{1}{4}$，

$P(X=4)=\frac{C_3^1C_2^1C_1^1C_1^1}{A_4^4}=\frac{1}{4}$，

所以 $E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$.

2. A 【解析】抛掷一枚质地均匀的硬币

100 次，设硬币正面向上次数为 Y，则 $Y\sim B\left(100,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $E(Y)=np=100\times\frac{1}{2}=50$，$D(Y)=np(1-p)=100\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=25.$

由题意，用正态随机变量 X 近似二项随机变量 Y，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $\mu=E(Y)=50$，$\sigma^2=D(Y)=25$，则 $\sigma=5.$

因为 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.682\ 7$，所以利用正态分布近似估算硬币正面向上的次数不超过 45 的概率为 $P(X\leqslant45)=P(X\leqslant50-5)=\frac{1-0.682\ 7}{2}\approx0.158\ 7$，**故选 A.**

3. ABD 【解析】对于选项 A，可知从 7 道单选题、5 道多选题中随机抽取出 6 道单选题、4 道多选题，

其概率为 $\frac{C_7^6C_5^4}{C_{12}^{10}}=\frac{35}{66}$，**故 A 正确；**

对于选项 B，所求概率为 $\frac{C_7^7C_5^3}{C_7^7C_5^3+C_7^6C_5^4}=\frac{2}{9}$，**故 B 正确；**

对于选项 C，设多选题全部选项选对的题数为 ξ，则 $\xi\sim B\left(5,\frac{1}{3}\right)$，

所以 $E(\xi)=5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$，故多选题总得分的期望为 $12\times\frac{5}{3}=20$，**故 C 错误；**

对于选项 D，设单选题选对的题数为 X，

因为单选题的题数为 $10-n$，所以 $X\sim B\left(10-n,\frac{3}{4}\right)$，所以 $E(X)=\frac{3(10-n)}{4}$，

故单选题总得分的期望为 $8\times\frac{3(10-n)}{4}=60-6n$，**故 D 正确. 故选 ABD.**

4. BC 【解析】选项 A，由题图知事件 A，B 互斥，所以 $P(AB)=0$，又 $P(A)>0$，$P(B)>0$，所以 $P(A)P(B)>0$，所以 $P(AB)\neq P(A)P(B)$，故事件 A，B 不相互独立，**A 不正确.**

选项 B,设题图中的每个小的长方形的面积为 S,由 $P(AB)=\dfrac{n(AB)}{n(U)}=\dfrac{S}{4S}=\dfrac{1}{4}$,$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}=\dfrac{n(A\overline{B})+n(AB)}{n(U)}=\dfrac{2S}{4S}=\dfrac{1}{2}$,$P(B)=\dfrac{n(B)}{n(U)}=\dfrac{n(\overline{A}B)+n(AB)}{n(U)}=\dfrac{2S}{4S}=\dfrac{1}{2}$,所以 $P(AB)=P(A)P(B)$,所以题图中事件 A,B 相互独立,B **正确**.

选项 C,由题图得 $B=U$,所以 $P(B)=P(U)=1$,$P(AB)=P(A)$,所以 $P(AB)=P(A)P(B)$,所以图中事件 A,B 相互独立,C **正确**.

选项 D,由题图知 A 为 B 的子集,所以 $P(AB)=P(A)$,而 B 为 U 的真子集,则 $P(B)<1$,所以 $P(A)P(B)<P(A)$,所以 $P(AB)\neq P(A)P(B)$,D **不正确**.

故选 BC.

一题多解 选项 A,事件 A,B 互斥,所以 $P(B|A)=0$,而 $P(B|\overline{A})>0$,所以 $P(B|A)\neq P(B|\overline{A})$,故事件 A,B 不相互独立,A **不正确**.

选项 B,设题图中的每个小的长方形的面积为 S,利用事件 A,B 相互独立$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\overline{B})$,由 $P(A|B)=\dfrac{n(AB)}{n(B)}=\dfrac{S(AB)}{S(B)}=\dfrac{S(AB)}{S(AB)+S(\overline{A}B)}=\dfrac{S}{S+S}=\dfrac{1}{2}$,$P(A|\overline{B})=\dfrac{n(A\overline{B})}{n(\overline{B})}=\dfrac{S(A\overline{B})}{S(\overline{B})}=\dfrac{S(A\overline{B})}{S(A\overline{B})+S(\overline{A}\,\overline{B})}=\dfrac{S}{S+S}=\dfrac{1}{2}=P(A|B)$,所以题图中事件 A,B 相互独立,B **正确**.

选项 C,因为 $P(B|A)=1=P(B|\overline{A})$,所以题图中事件 A,B 相互独立,C **正确**.

选项 D,由题图知 A 为 B 的子集,所以 $P(B|A)=1$;而 B 为 U 的真子集,则 $P(B|\overline{A})<1$,所以 $P(B|A)\neq P(B|\overline{A})$,则事件 A 与事件 B 不相互独立,D **不正确**.

5. $m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right]$

思路导引 引入随机变量 X_i，定义 $X_i=1$ 时，表示第 i 个盒子中有球，$X_i=0$ 时，表示第 i 个盒子中没有球，其中 $i=1,2,\cdots,m$，求得 $E(X_i)=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$，根据期望的加法性质即可得解.

【解析】引入随机变量 X_i，定义 $X_i=1$ 时，表示第 i 个盒子中有球，$X_i=0$ 时，表示第 i 个盒子中没有球，其中 $i=1,2,\cdots,m$，则装有球的盒子的总数 $X=X_1+X_2+\cdots+X_m$，

又 $P(X_i=0)=\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$，

$P(X_i=1)=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$，

故 $E(X_i)=1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$，

所以 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{m}E(X_i)=m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right]$，

即装有球的盒子个数的期望是 $m\left[1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^n\right]$.

6. 3 【解析】当 $a=1$ 时，$a^b=1$，个位数为 1，有 4 个，

当 $a=3,b=2$ 时，$a^b=9$，个位数为 9，

当 $a=3,b=4$ 时，$a^b=81$，个位数为 1，

当 $a=3,b=6$ 时，$a^b=27\times27$，个位数为 9，

当 $a=3,b=8$ 时，$a^b=81\times81$，个位数为 1，

当 $a=7,b=2$ 时，$a^b=49$，个位数为 9，

当 $a=7,b=4$ 时，$a^b=49\times49$，个位数为 1，

当 $a=7,b=6$ 时，$a^b=49\times49\times49$，个位数为 9，

当 $a=7,b=8$ 时，$a^b=49\times49\times49\times49$，个位数为 1，

当 $a=9,b=2$ 时，$a^b=81$，个位数为 1，

当 $a=9,b=4$ 时，$a^b=81\times81$，个位数为 1，

当 $a=9,b=6$ 时，$a^b=81\times81\times81$，个位数为 1，

当 $a=9,b=8$ 时，$a^b=81\times81\times81\times81$，个位数为 1，

综上所述，X 的可能取值为 1，9，且 $P(X=1)=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$，$P(X=9)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，

所以 $E(X)=1\times\frac{3}{4}+9\times\frac{1}{4}=3$.

第七章 全章上分

1. C 【解析】由题意知 $a+b=4$，

提示：正态曲线的对称性

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{4}\left(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{4}\left(2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=1$，

当且仅当 $a=b=2$ 时取等号，即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 1. **故选 C.**

2. B 【解析】因为随机变量 X,Y 均服从两点分布，所以 $P(X=0)=1-P(X=1)=\frac{2}{3}$，$P(X=1,Y=1)=P(XY=1)=1-P(XY=0)=\frac{1}{4}$，

因为 $P(Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=P(X=0,Y=1)+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$，

所以 $P(X=0,Y=1)=\frac{5}{12}$，由条件概率公式得，$P(Y=1\mid X=0)=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(X=0)}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{8}$. **故选 B.**

3. A 【解析】记事件 A：检查结果呈阳性，事件 B：被检查者确实患 X 疾病，

由题意可知，$P(B)=0.000\ 4$，$P(\overline{B})=0.999\ 6$，$P(A\mid B)=0.99$，$P(A\mid\overline{B})=0.001$，

所以 $P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})\cdot P(A\mid\overline{B})=0.000\ 4\times0.99+0.999\ 6\times0.001=0.001\ 395\ 6$，

因此这种检验方法在该地区的误诊率 $P(\overline{B}\mid A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}{P(A)}=$

$\dfrac{0.9996\times0.001}{0.0013956}\approx0.716$，**故选** A.

4. C 【解析】$E(X)=-2\times\dfrac{1}{3}-1\times a+1\times\left(\dfrac{1}{3}-a\right)+2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}-2a$，随机变量 X^2 的数学期望 $E(X^2)=(-2)^2\times\dfrac{1}{3}+(-1)^2\times a+1\times\left(\dfrac{1}{3}-a\right)+2^2\times\dfrac{1}{3}=3$，则 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=3-\left(\dfrac{1}{3}-2a\right)^2=-4\left(a-\dfrac{1}{6}\right)^2+3$，所以当 a 在 $\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ 上逐渐增大时，$D(X)$ 先增大后减小，

提示：对于二次函数，当图象开口向下时，在对称轴左侧的图象所对应的函数单调递增，在对称轴右侧的图象所对应的函数单调递减

故选 C.

5. C 【解析】设小王答对题的个数为 Y，则由已知可得 $Y\sim B(3,p)$，所以 $E(Y)=3p$，$D(Y)=3p(1-p)$.

因为每道题答对得 2 分，答错倒扣 1 分，X 为小王答完 3 道题的总得分，所以 $X=2Y-(3-Y)=3Y-3$，

所以 $E(X)=3E(Y)-3=9p-3$，$D(X)=9D(Y)=27p(1-p)$，

所以 $E(X)+D(X)=-27p^2+36p-3=-27\left(p-\dfrac{2}{3}\right)^2+9$，又 $0<p<1$，所以当 $p=\dfrac{2}{3}$ 时，$E(X)+D(X)$ 取最大值，最大值为 9. **故选** C.

6. B

思路导引 先根据一次从中任取 3 个球，取出的球是 2 个黑球，1 个白球的概率为 $\dfrac{15}{28}$，列方程求出 n，然后根据题意确定 X 的可能取值范围，再分析满足 $|X-7|\leqslant1$ 的得分对应黑球数量 k 的取值，计算对应组合数之和，从而可求出概率.

【解析】因为一次从中任取 3 个球，取

出的球是 2 个黑球,1 个白球的概率为 $\frac{15}{28}$,所以 $\frac{C_5^2C_n^1}{C_{5+n}^3}=\frac{15}{28}$,即 $280n=15\times\frac{(5+n)(4+n)(3+n)}{6}$,化简得 $(n-3)\cdot(n^2+15n-20)=0$,解得 $n=3$ 或 $n^2+15n-20=0$. 由 $n^2+15n-20=0$,得 $n=\frac{-15\pm\sqrt{305}}{2}\notin \mathbf{N}^*$(舍去),所以 $n=3$.

设从袋子中取出 4 个球中有 k 个黑球,则白球有 $(4-k)$ 个,所以 $X=k+2(4-k)=8-k$. 由 $|X-7|\leqslant 1$,得 $6\leqslant X\leqslant 8$,则 $6\leqslant 8-k\leqslant 8$,得 $0\leqslant k\leqslant 2$,即 k 的可能取值为 0,1,2. 当 $k=0$ 时,$4-k=4>3$ 不合题意;当 $k=1$ 时,即取出 1 个黑球,3 个白球,则有 $C_5^1C_3^3=5$(种)取法;当 $k=2$ 时,即取出 2 个黑球,2 个白球,则有 $C_5^2C_3^2=30$(种)取法. 所以 $P(|X-7|\leqslant 1)=\frac{5+30}{C_8^4}=\frac{35}{70}=\frac{1}{2}$. **故选 B.**

7. BCD 【解析】$\because P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$,$\therefore P(AB)=\frac{1}{20}$,**B 正确**;

$\because P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{5}P(B)=\frac{1}{20}$,

$\therefore P(B)=\frac{1}{4}$,**A 错误**;

$\because P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$,

$\therefore P(\overline{A}|B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$,**C 正确**;

$P(A+\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A)P(\overline{B})=\frac{1}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{4}{5}$,**D 正确. 故选 BCD.**

8. AB

思路导引 A 选项由互斥事件的概念可得;B 选项由概率的乘法公式可得;C 选项由全概率公式求解即可判断;D 选项由全概率公式求概率,再结合相互独立事件的等价条件判断.

【解析】事件“小李第 1 份实践报告评

定为合格”与“小李第 1 份实践报告评定为不合格”不可能同时发生，所以为互斥事件，**故 A 正确**；

若小李第 1 份实践报告评定为不合格，设事件 A_i =“小李第 i 份实践报告评定为合格”，$i=1,2,3$，则事件“小李获得 0.4 学分”即为事件 A_2A_3，由概率的乘法公式得 $P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3|A_2)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$，**故 B 正确**；

若小李第 1 份实践报告评定为合格，则由全概率公式得 $P(A_3)=P(A_3|A_2)\cdot P(A_2)+P(A_3|\overline{A_2})P(\overline{A_2})=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{17}{25}$，**故 C 错误**；

由 C 选项知 $P(A_3|A_1)=\frac{17}{25}$，若小李第 1 份实践报告评定为不合格，则由全概率公式可得 $P(A_3)=P(A_3|A_2)\cdot P(A_2)+P(A_3|\overline{A_2})P(\overline{A_2})=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{25}$，即 $P(A_3|\overline{A_1})=\frac{16}{25}$，所以 $P(A_3|A_1)\neq P(A_3|\overline{A_1})$，即小李第 1 份实践报告评定是否合格对其第 3 份实践报告评定为合格的概率有影响，故“小李第 1 份实践报告评定为合格”与“小李第 3 份实践报告评定为合格”不相互独立，**故 D 错误. 故选 AB.**

9. 7 【**解析**】设有 X 名学生选择前往北京或上海研学，由题意可得每名学生选择前往北京或上海研学的概率 $p=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，则 $X\sim B\left(30,\frac{1}{4}\right)$.

设有 k 名学生选择前往北京或上海研学的概率最大，

则 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$ 即 $C_{30}^{k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{30-k}\geqslant C_{30}^{k+1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{29-k}$，且 $C_{30}^{k}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{30-k}\geqslant C_{30}^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{31-k}$，解得 $\frac{27}{4}\leqslant k\leqslant\frac{31}{4}$，又 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=7$.

所以有 7 名学生选择前往北京或上海研学的概率最大.

10. $\left(\frac{4}{5}\right)^{n}$　$5-(n+5)\left(\frac{4}{5}\right)^{n}$

思路导引 根据条件概率的计算公式以及递推关系可得$\dfrac{P(X=n+1)}{P(X=n)}=\dfrac{4}{5}(n\geqslant 2)$，分析当$n=1$时的情况，并根据等比数列的通项公式可得$P(X=n)=\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$，即可求解第一空，根据错位相减法求和即可求解第二空.

【解析】因为$P(X=n+1\mid X>n)=\dfrac{P(X=n+1)}{P(X>n)}=\dfrac{1}{5}$，所以$P(X=n+1)=\dfrac{1}{5}P(X>n)$，将$n$换成$n-1$，此时$P(X=n)=\dfrac{1}{5}P(X>n-1)$，

两式相减可得$P(X=n)-P(X=n+1)=\dfrac{1}{5}P(X>n-1)-\dfrac{1}{5}P(X>n)=\dfrac{1}{5}P(X=n)$，

即$\dfrac{P(X=n+1)}{P(X=n)}=\dfrac{4}{5}(n\geqslant 2)$，又$P(X=2)=\dfrac{1}{5}P(X>1)=\dfrac{1}{5}\times[1-P(X=1)]=\dfrac{4}{5}P(X=1)$，

所以$\dfrac{P(X=n+1)}{P(X=n)}=\dfrac{4}{5}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立，

所以$\{P(X=n)\}$是首项为$\dfrac{1}{5}$，公比为$\dfrac{4}{5}$的等比数列，

所以$P(X=n)=\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$，故$P(X>n)=5P(X=n+1)=5\times\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n}$.

由$a_n=nP(X=n)=\dfrac{1}{5}\times n\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$，

得$S_n=\dfrac{1}{5}\left[1\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{0}+2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{1}+\cdots+(n-1)\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-2}+n\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}\right]$，

$\dfrac{4}{5}S_n=\dfrac{1}{5}\left[1\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{1}+2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2}+\cdots+(n-1)\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}+n\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n}\right]$，

两式作差得$\dfrac{1}{5}S_n=\dfrac{1}{5}\left[1+\left(\dfrac{4}{5}\right)^{1}+\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2}+\cdots+\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}-n\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n}\right]$，

故 $S_n=\dfrac{1\times\left[1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right]}{1-\dfrac{4}{5}}-n\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=$

$5-(n+5)\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

11. **思路导引** (1)根据独立事件概率公式计算一天内发生故障的机器台数分别对应的概率并求分布列;(2)比较甲、乙两台机器生产零件的平均利润,要先根据正态分布的性质求出生产出的零件不同内径范围的概率,再计算平均利润.

【解】(1)Z 的可能取值为 0,1,2,

$P(Z=0)=(1-0.1)\times(1-0.2)=0.9\times0.8=0.72$,

$P(Z=1)=0.1\times(1-0.2)+(1-0.1)\times0.2=0.1\times0.8+0.9\times0.2=0.08+0.18=0.26$,

提示:对事件进行分解,一方面分解为互斥的几类事件求概率;另一方面分解为独立的事件,利用独立事件概率公式求概率

$P(Z=2)=0.1\times0.2=0.02$,

故 Z 的分布列为

Z	0	1	2
P	0.72	0.26	0.02

(2)甲机器:已知甲生产出的零件内径 $X\sim N(10,1)$,则 $\mu_1=10,\sigma_1=1$,

$P(X<8)\approx\dfrac{1-0.955}{2}=0.0225$,

$P(X>10)=\dfrac{1}{2}=0.5$,

$P(8\leqslant X\leqslant10)\approx\dfrac{0.955}{2}=0.4775$.

则甲机器每天生产出的零件的平均利润约为 $1000\times[0.0225\times(-2)+0.5\times(-8)+0.4775\times20]=1000\times5.505=5505$(元).

乙机器:已知乙生产出的零件内径 $Y\sim N(8,4)$,则 $\mu_2=8,\sigma_2=2,P(Y<8)=\dfrac{1}{2}=0.5$,

$P(Y>10)\approx\dfrac{1-0.683}{2}=0.1585$,

$P(8\leqslant Y\leqslant10)\approx\dfrac{0.683}{2}=0.3415$.

则乙机器每天生产出的零件的平均利

润约为 $1\ 000\times[0.5\times(-2)+0.158\ 5\times(-8)+0.341\ 5\times20]=4\ 562$(元).

因为 $5\ 505>4\ 562$,所以甲机器每天生产出的零件的平均利润更大.

12.【解】(1)设甲、乙两名教师恰好答对 2 个问题的情况分别为事件 A 与事件 B,

则 $P(A)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$,

$P(B)=\frac{C_4^2C_2^2}{C_6^4}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$,

所以 $P(AB)=\frac{8}{27}\times\frac{2}{5}=\frac{16}{135}$.

(2)设甲教师所得分数为 X,则答对题数为 $\frac{X}{2}$,有 $\frac{X}{2}\sim B\left(4,\frac{2}{3}\right)$,

故 $E(X)=2E\left(\frac{X}{2}\right)=2\times4\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$,

$D(X)=4D\left(\frac{X}{2}\right)=4\times4\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{9}$.

设乙教师所得分数为 Y,则 Y 的可能取值为 4,6,8,

$P(Y=4)=\frac{C_4^2C_2^2}{C_6^4}=\frac{2}{5}$, $P(Y=6)=\frac{C_4^3C_2^1}{C_6^4}=\frac{8}{15}$, $P(Y=8)=\frac{C_4^4}{C_6^4}=\frac{1}{15}$,

则 $E(Y)=4\times\frac{2}{5}+6\times\frac{8}{15}+8\times\frac{1}{15}=\frac{24+48+8}{15}=\frac{16}{3}$,

$D(Y)=\frac{2}{5}\times\left(4-\frac{16}{3}\right)^2+\frac{8}{15}\times\left(6-\frac{16}{3}\right)^2+\frac{1}{15}\times\left(8-\frac{16}{3}\right)^2=\frac{64}{45}$,

由 $E(X)=E(Y)$,$D(X)>D(Y)$,知乙教师的得分更为稳定,故选择乙教师参赛比较合适.

提示: 随机变量 X 的方差 $D(X)$ 反映了随机变量 X 的取值的稳定与波动的程度. $D(X)$ 越小,随机变量取值的稳定性越高,波动越小

13. 思路导引 (1)先得到 X 的可能取值为 2,3,4,再分别计算各取值对应的概率并列出 X 的分布列,进而求解 X 的数学期望和方差;(2)由条件概率的计算公式求解;(3)由题意得 $p_n,p_{n-1},p_{n-2}(n\geqslant3)$ 之间的递推关系,通过构造法得到 $\{p_n\}$ 的通项公式.

【解】(1)X 的可能取值为 2,3,4,

可得 $P(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$,$P(X=3)=C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,$P(X=4)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

所以 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

所以 $E(X)=2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{4}{9}+4\times\frac{4}{9}=\frac{10}{3}$,

$D(X)=\left(2-\frac{10}{3}\right)^2\times\frac{1}{9}+\left(3-\frac{10}{3}\right)^2\times\frac{4}{9}+\left(4-\frac{10}{3}\right)^2\times\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$.

(2)设“总得分为 4”为事件 A,“抽取了 3 人”为事件 B,

则 $P(A)=\left(\frac{1}{3}\right)^4+C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{55}{81}$,$P(AB)=C_3^1\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$,

所以在总得分为 4 的条件下,抽取了 3 人的概率为 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{55}{81}}=\frac{18}{55}$.

(3)由题意可知 $p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}p_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$,

$p_1=\frac{1}{3}$,$p_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$,

所以 $p_n+\frac{2}{3}p_{n-1}=p_{n-1}+\frac{2}{3}p_{n-2}(n\geqslant 3)$,

又 $p_2+\frac{2}{3}p_1=\frac{7}{9}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=1$,所以 $\left\{p_n+\frac{2}{3}p_{n-1}\right\}$是首项为 1 的常数列,故 $p_n+\frac{2}{3}p_{n-1}=1(n\geqslant 2)$,

所以 $p_n-\frac{3}{5}=-\frac{2}{3}\left(p_{n-1}-\frac{3}{5}\right)(n\geqslant 2)$,又 $p_1-\frac{3}{5}=\frac{1}{3}-\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}$,

所以$\left\{p_n-\frac{3}{5}\right\}$是首项为$-\frac{4}{15}$,公比为$-\frac{2}{3}$的等比数列,

故$p_n-\frac{3}{5}=-\frac{4}{15}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,即$p_n=-\frac{4}{15}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{5}=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$.

方法:在求解概率与数列的综合问题时,找到p_n与p_{n-1},p_{n-2}之间的关系,再利用数列的递推关系求出对应的通项公式即可得解